Fizika mérnök informatikusoknak 1. FBNxE-1

Mechanika 5. előadás

Dr. Geretovszky Zsolt

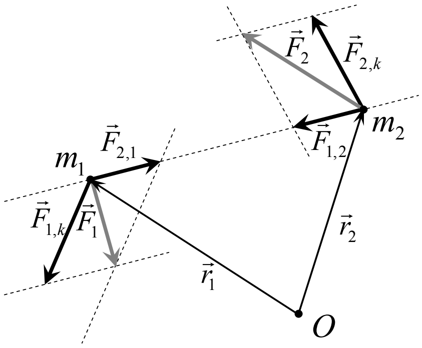
2010. október 6.

Ismétlés

Megmaradó mennyiségek

- Tömegpont esetén
  - Impulzus: $\vec{I} \equiv m\vec{v}$
    - impulzustétel és az impulzus megmaradásának tétele
  - Impulzusmomentum: $\vec{N} \equiv \vec{r} \times \vec{I} = \vec{r} \times m\vec{v}$
    - impulzusmomentum tétel és az impulzusmomentum megmaradásának tétele
  - Energia
    - munkatétel, energiafajták, mechanikai energia megmaradásának tétele
- Pontrendszer esetén
  - A pontrendszer impulzusa: $\vec{I} \equiv \sum_{i=1}^{n} \vec{I}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$
    - impulzustétel, tömegközéppont mozgásának tétele és az impulzus megmaradásának tétele (külső erők!)
  - A pontrendszer impulzusmomentuma: $\vec{N} \equiv \sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{I}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$
    - impulzusmomentum tétel és az impulzusmomentum megmaradásának tétele (külső erők!)
  - Energia
    - munkatétel pontrendszerre (külső és belső erők!)

Az impulzusmomentum tétel származtatása



$\vec{F}_{1,k}$ és $\vec{F}_{2,k}$ a pontrendszeren kívülről származó külső erők

$\vec{F}_{1,2}$ és $\vec{F}_{2,1}$ a pontrendszer pontjai között ható, N-III axiómáját kielégítő belső erők

A mozgásegyenleteket balról vektoriálisan szorozva $\vec{r}_i$ -vel:

az 1. tömegpontra: $\vec{r}_1 \times \vec{F}_{1,k} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{2,1} = \frac{d\vec{N}_1}{dt}$

a 2. tömegpontra: $\vec{r}_2 \times \vec{F}_{2,k} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{1,2} = \frac{d\vec{N}_2}{dt}$

a pontrendszerre: $\vec{r}_1 \times \vec{F}_{1,k} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{2,k} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{2,1} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{1,2} = \frac{d\vec{N}_1}{dt} + \frac{d\vec{N}_2}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{2}\vec{N}_i \equiv \frac{d\vec{N}}{dt}$

ahol $\vec{N} = \sum_{i=1}^{2}\vec{N}_i$ *a pontrendszer (teljes) impulzusmomentuma*

N-III axiómája értelmében $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$ $\longrightarrow$ $\sum_{i=1}^{2}\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,k} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{2,1} = \frac{d\vec{N}}{dt}$

A bal oldalon szereplő második tag 0, mert az $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ vektor m_2-ből m_1-be mutat, azaz párhuzamos $\vec{F}_{2,1}$-gyel.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,k} = \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i = \frac{d\vec{N}}{dt}}$$

Egy pontrendszer impulzusnyomatékának idő szerinti differenciálhányadosa egyenlő a rendszerre ható külső erők forgatónyomatékainak eredőjével.

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2$$
$$v_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1$$

Rugalmas ütközés

(Kísérlet: kiskocsik rugalmas ütközése légpárnás sínen Film: 700/65***)***

1) Mozgó kocsi ütközik azonos tömegű álló kocsinak:

$m_1 = m_2 = m$ $\quad v_1 = áll.$, $v_2 = 0$ $\Rightarrow$ $v_1' = 0$, $v_2' = v_1$

2) Mozgó kocsi ütközik többszörös (k-szoros) tömegű álló kocsinak:

$m_1 = m$, $m_2 = k \cdot m$ $\quad v_1 = áll.$, $v_2 = 0$ $\Rightarrow$ $v_1' = -\frac{k-1}{k+1}v_1$, $v_2' = \frac{2}{k+1}v_1$

3) Többszörös (k-szoros) mozgó kocsi ütközik álló kocsinak:

$m_1 = k \cdot m$, $m_2 = m$ $\quad v_1 = áll.$, $v_2 = 0$ $\Rightarrow$ $v_1' = \frac{k-1}{k+1}v_1$, $v_2' = \frac{2 \cdot k}{k+1}v_1$

4) Mozgó kocsi ütközik leszorított kocsinak:

$m_1 = m$, $m_2 = \infty$ $\quad v_1 = áll.$, $v_2 = 0$ $\Rightarrow$ $v_1' = -v_1$, $v_2' = 0$

Az időadatok a 0,6m út megtételéhez szükséges időt mutatják.

$m_1=m$; $m_2=m$	1. kocsi		2. kocsi	
	előtt	után	előtt	után
t[s]	$t_1=1{,}149$	áll	áll	$t'_2=1{,}151$
v[m/s]	$v_1=0{,}522$	$v'_1=0$	$v_2=0$	$v'_2=0{,}521$

$m_1=m$; $m_2=2m$	1. kocsi		2. Kocsi	
	előtt	után	előtt	után
t[s]	$t_1=0{,}817$	$t'_1=2{,}566$	áll	$t'_2=1{,}293$
v[m/s]	$v_1=0{,}734$	$v'_1=-0{,}234$	$v_2=0$	$v'_2=0{,}464$

$m_1=m$; $m_2=3m$	1. kocsi		2. kocsi	
	előtt	után	előtt	után
t[s]	$t_1=0{,}929$	$t'_1=2{,}014$	áll	$t'_2=2{,}021$
v[m/s]	$v_1=0{,}646$	$v'_1=-0{,}298$	$v_2=0$	$v'_2=0{,}297$

$m_1=2m$; $m_2=m$	1. kocsi		2. kocsi	
	előtt	után	előtt	után
t[s]	$t_1=1{,}127$	$t'_1=3{,}485$	áll	$t'_2=0{,}865$
v[m/s]	$v_1=0{,}532$	$v'_1=+0{,}172$	$v_2=0$	$v'_2=0{,}694$

$m_1=3m$; $m_2=m$	1. kocsi		2. kocsi	
	előtt	után	előtt	után
t[s]	$t_1=1{,}411$	$t'_1=2{,}867$	áll	$t'_2=0{,}958$
v[m/s]	$v_1=0{,}425$	$v'_1=+0{,}210$	$v_2=0$	$v'_2=0{,}626$

Rugalmatlan ütközés

Rugalmatlan ütközés (impulzus megmarad, mech. energia nem):

(Kísérlet: rugalmatlan ütközés légpárnás sínen Film: 700/68***)***

$$(m_1+m_2)\mathbf{v}' = m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v}_2 \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1+m_2}$$

(Kísérlet: ballisztikus inga
http://www.youtube.com/watch?v=oNGm4mVWMuY

Lövedék	Inga
m, v	$M, V=0$

Az ütközés során csak belső erők lépnek fel, az impulzus tehát megmarad

$$mv + M0 = (m+M)V' \qquad V' = \frac{m}{m+M}v$$

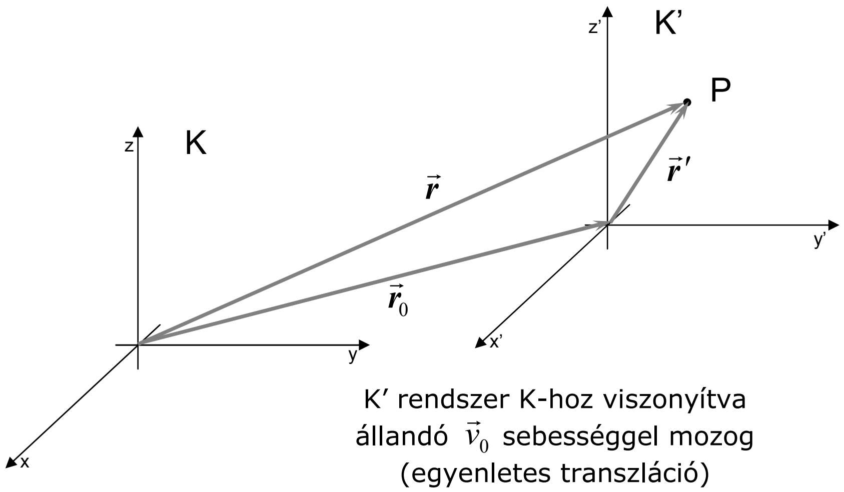
Az inga kilendülése során a mechanikai energia megmarad.

$$\frac{1}{2}(m+M)V'^2 + (m+M)g\cdot 0 = \frac{1}{2}(m+M)0^2 + (m+M)g\cdot h \qquad h = \frac{V'^2}{2g}$$

s így a lövedék sebessége $v = \dfrac{m+M}{m}\sqrt{2gh}$

Egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerek 1.

(Kísérletek: függőleges hajítás 1) állandó sebességű, illetve
2) gyorsuló kiskocsin
Film: TÁMOP 51:05-, 52:01-*)*



K' rendszer K-hoz viszonyítva
állandó $\vec{v}_0$ sebességgel mozog
(egyenletes transzláció)

$$\vec{r}_0 = \vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_{00}$$
$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0 = \vec{r}\,' + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_{00}$$
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \vec{v}_0$$
$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0$$
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + 0$$
$$\vec{a} = \vec{a}\,'$$

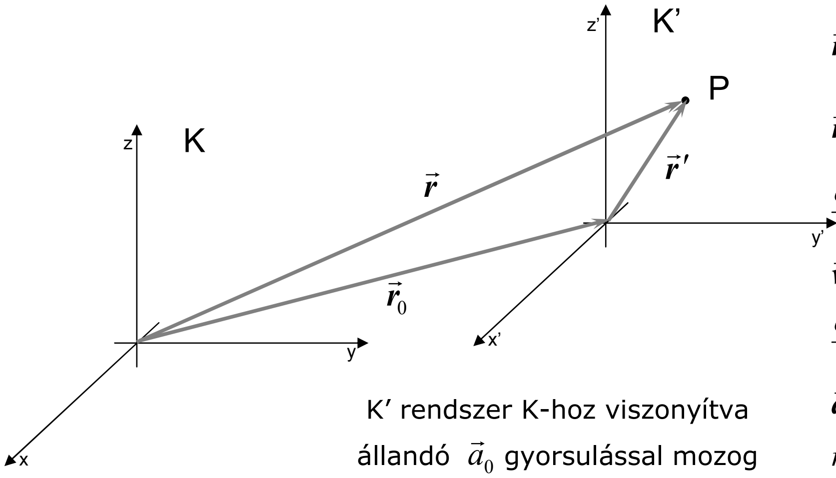
Egyenletes transzlációt végző rendszerek esetén
a test gyorsulása nem függ a rendszertől
a test tömege sem függ a rendszertől
az erők sem függnek a vonatkoztatási rendszerről, azaz

a két rendszerben azonos a tömegpont mozgásegyenlete:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}\,' = m\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}$$

Galilei-féle relativitási elv:
Az egymáshoz képest EVEM-t végző koordinátarendszerek a mechanikai jelenségek leírása szempontjából ekvivalensek.

Egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerek 2.



K′ rendszer K-hoz viszonyítva

állandó $\vec{a}_0$ gyorsulással mozog

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_{00} + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{\vec{a}_0}{2} t^2$$

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0 = \vec{r}\,' + \vec{r}_{00} + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{\vec{a}_0}{2} t^2$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \vec{v}_0 + \vec{a}_0 \cdot t$$

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0 + \vec{a}_0 \cdot t$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \vec{a}_0$$

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_0$$

$$m\vec{a} - m\vec{a}_0 = m\vec{a}\,' \quad \rightarrow \quad \sum \vec{F}_i - m\vec{a}_0 = m\vec{a}\,'$$

Gyorsuló transzlációt végző rendszerek:

Ha egy inerciarendszerhez képest a_0 gyorsulású EVEV mozgást végző koordinátarendszerben akarjuk alkalmazni a dinamika alapegyenletét, akkor az inerciarendszerben is fellépő erőkhöz hozzá kell adnunk egy ún. tehetetlenségi erőt is:

$$F_{tehetetlen} = -ma_0$$

m: a test tömege
a_0: a K′ rendszer gyorsulása!!!

Gyorsuló transzlációt végző rendszerek

Példák és alkalmazások:

1) Gyorsuló kocsi asztalán levő golyó

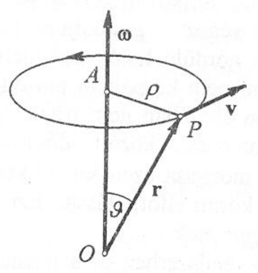
2) Jobbra gyorsuló kiskocsin az embernek jobbra kell dőlnie, hogy el ne essen.

3) Mit mér a mérleg egy gyorsuló liftben?

Egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerek 3.

Idézzük fel, hogy szögsebesség vektor mennyiség

$$v_y = x\omega, \quad v_x = -y\omega, \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



Forgó koordináta-rendszerek:

Egy inerciarendszerhez képest ω szögsebességgel *forgó* rendszerben az *m* tömegű anyagi pontra az inerciarendszerben is ható erőkhöz hozzá kell adnunk a következő két tehetetlenségi erőt is:

$$\vec{F}_{centrifugális} = m\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)$$ Minden forgó rendszerben fellép.

$$\vec{F}_{Coriolis} = 2 \cdot m \cdot \vec{v} \times \vec{\omega}$$ Akkor lép fel, ha a test a *forgó rendszerben* még mozog is.