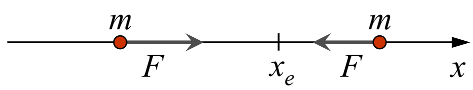
A rezgések dinamikai vizsgálata, a rezgések kialakulásának feltételei



Mozgásegyenlet: $m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$

kezdeti feltételek: $x_0 = x(t_0)$

$$v_0 = \dot{x}_0 = v(t_0) = \dot{x}(t_0)$$

Ha $F = F(x)$, akkor az erőtér **konzervatív**.

Helyzeti energia: $U(x) = -\int_{x_e}^{x} F(\xi)\, d\xi$

$$F(x) = -U'(x) = -\frac{dU}{dx}$$

Rezgés kialakulásához szükséges:

- x_e egyensúlyi helyzet megléte,
  azaz olyan x_e pont(ok) létezése, melyre
  $F(x_e) = 0$.
- x_e egyensúlyi helyzet stabilitása, vagyis
  az erő egyensúlyi helyzet környezetében, az egyensúlyi helyet felé mutat.

A potenciális energiával megfogalmazva:

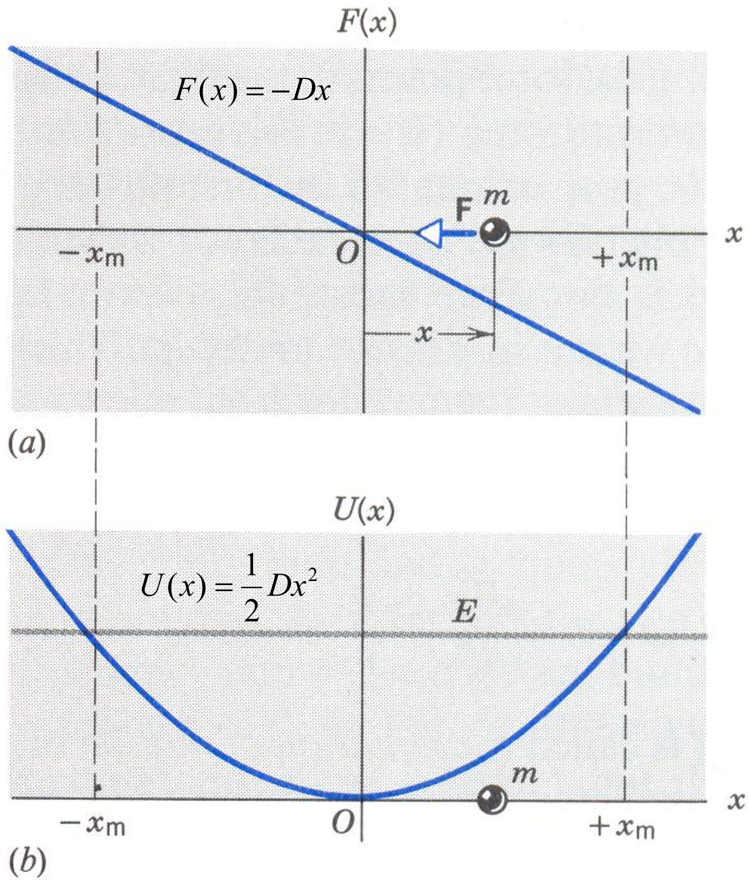
- Rezgés akkor jön létre, ha $U(x)$-nek (lokális) minimuma van

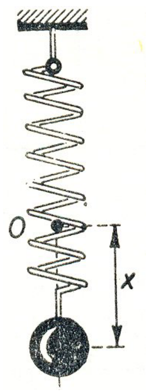
A mechanikai energia megmarad: $K + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E$

Ez a $t = t_0$–kor is igaz, így a teljes energiát a kezdeti feltételek **meghatározzák**:

$$E = K_0 + U_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0)$$

Harmonikus rezgés dinamikus leírása





Mozgásegyenlet:

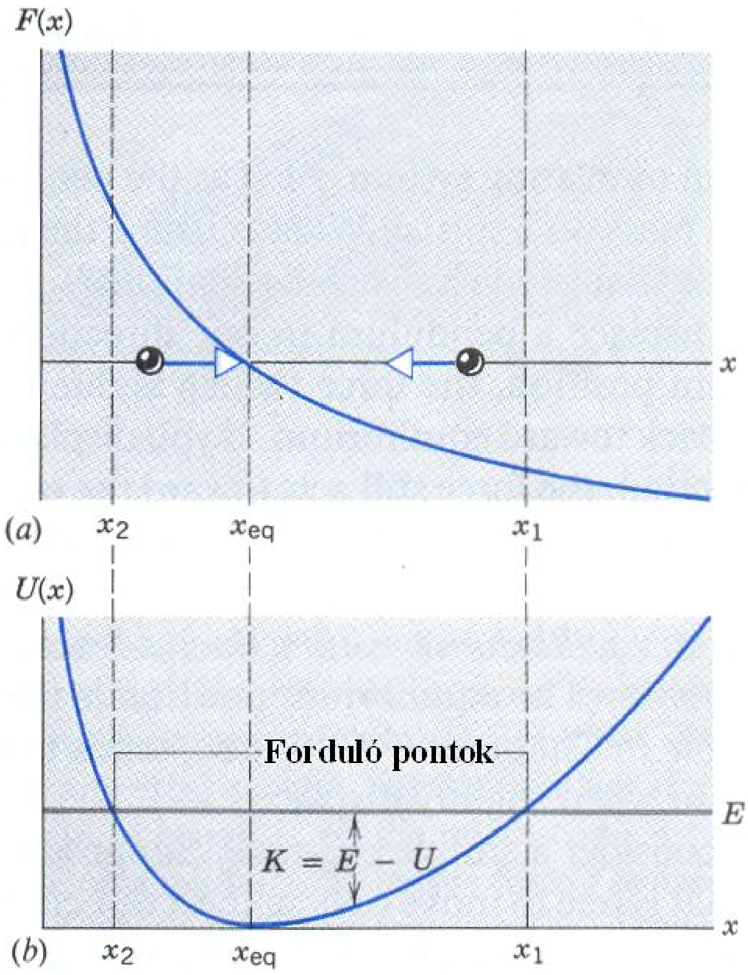
$$m\ddot{x} = -Dx$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0,} \qquad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

a harmonikus rezgés differenciálegyenlete

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)}$$

Az A és α állandókat a kezdeti feltételek határozzák meg.

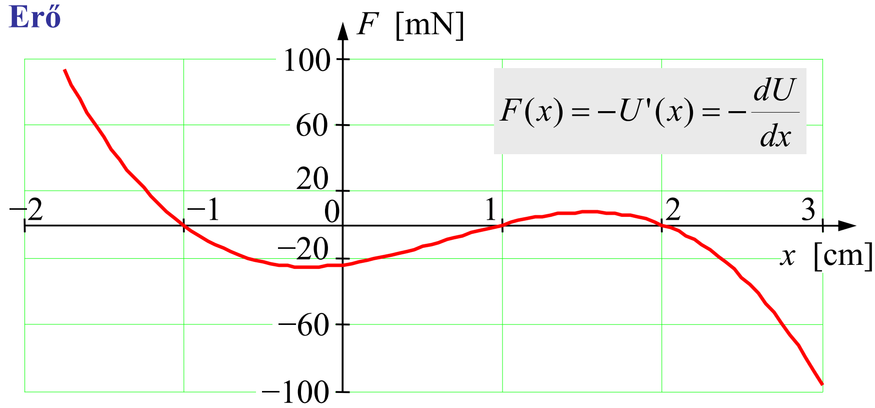


A molekulákat összetartó erők és potenciális energiájuk

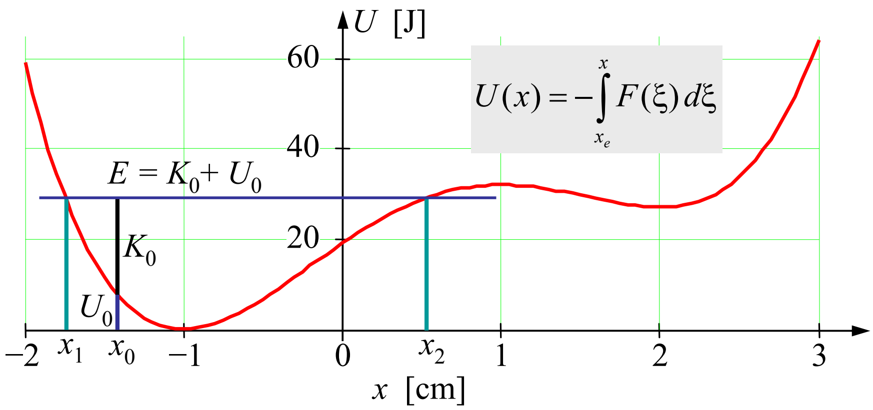
- Az egyensúlyi helyzet körüli kis kitérésekre az erő egyenessel, a potenciális energia parabolával közelíthető.
- Ezért kis kitérésekre a rezgés jó közelítéssel harmonikus rezgés
- Nagyobb kitérésekre anharmonikus rezgés alakul ki.

Rezgések létrejöttének dinamikai szemléltetése

Erő



Helyzeti (potenciális) energia



A mozgás tartománya

A forduló pontoknál $K = 0$

Ezért itt $E = K + U = U$

$U(x) = E$ → x_1, x_2

$$x_1 \leq x \leq x_2$$

Szemléltetés

n_harm-rez-1.avi [0:05]

n_harm-rez-2.avi [0:05]

n_harm-rez-3.avi [0:05]

Kísérlet

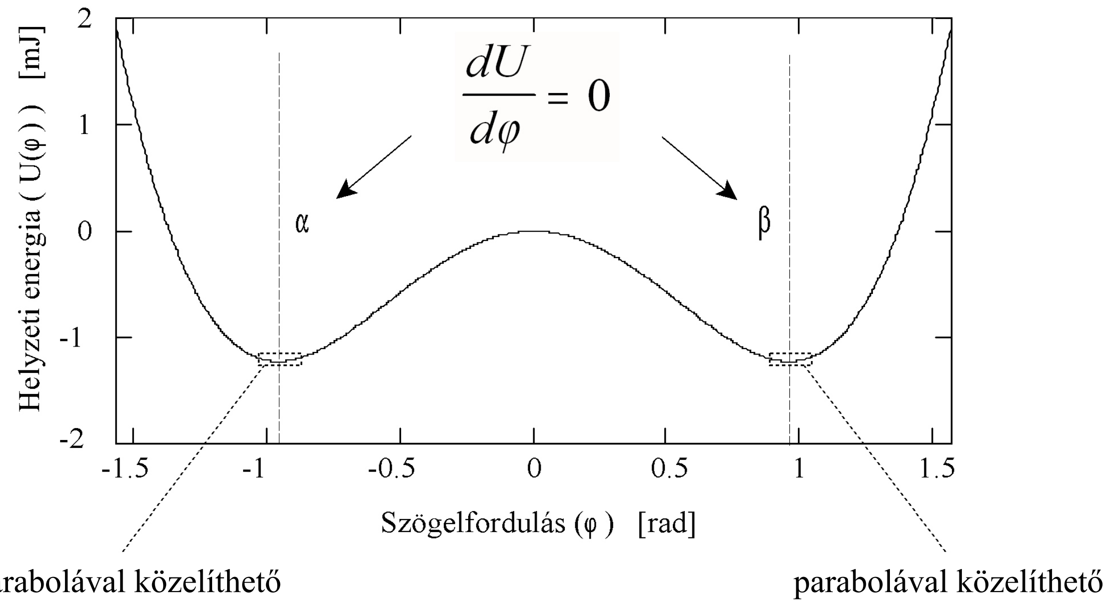
Pohl-féle készülék nehezékkel ellátva [2:10]

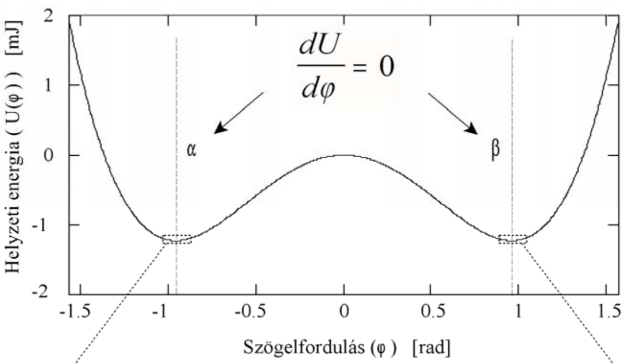
Anharmonikus rezgések szemléltetése forgási rezgésekkel

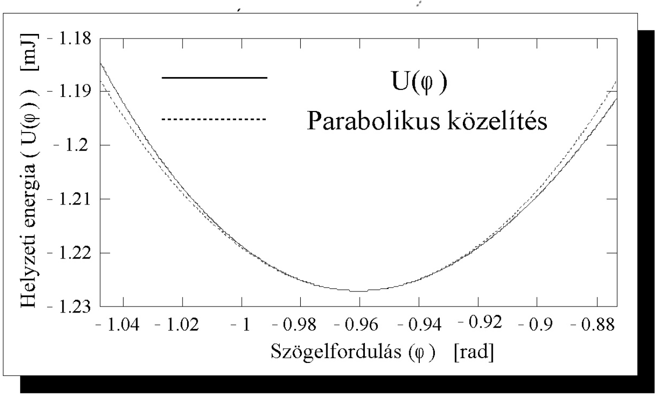
$$\boxed{U(\varphi) = \frac{1}{2} D\varphi^2 + mg\,R(\cos\varphi - 1)}$$

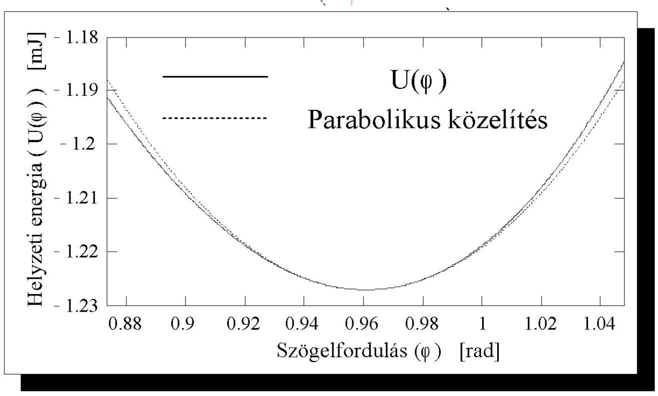
$$M = -U'(\varphi) = -D\varphi + mgR\,\sin\varphi$$

Mozgásegyenlet: $\Theta\ddot{\varphi} = -D\varphi + mgR\,\sin\varphi$





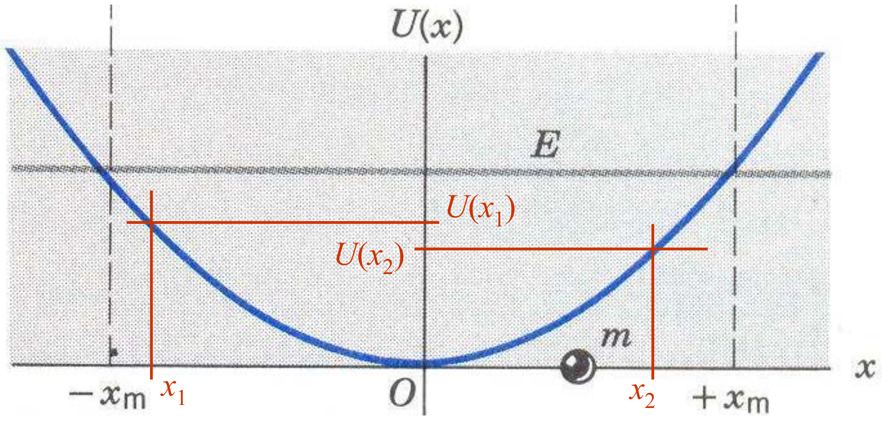




$$U(\varphi) \approx U(\varphi_0) + U'(\varphi_0)(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2} U''(\varphi_0)(\varphi - \varphi_0)^2$$

$$U'(\varphi_0) = 0 \Rightarrow U(\varphi) \approx U(\varphi_0) + \frac{1}{2} U''(\varphi_0)(\varphi - \varphi_0)^2$$

A súrlódás hatására csillapodó rezgés alakul ki.



x_1 és x_2 két egymást követő fordulópont. $\Rightarrow$ $v_1 = \dot{x}_1 = 0$ és $v_2 = \dot{x}_2 = 0$

Munkatétel: $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \sum W$ $\Rightarrow$ $0 = W_F + W_S$ $\Rightarrow$ $W_S = -W_F$

A súrlódási erő munkája mindig negatív: $W_S < 0$

A rugalmas erő munkája kifejezhető $U(x)$-l: $\Rightarrow$ $W_F = U(x_1) - U(x_2)$

$\Rightarrow$ $U(x_2) - U(x_1) < 0$

$U(x_2) < U(x_1)$

A maximális kitérés csökken az idővel, csillapodás lép fel. $\Leftarrow$ $|x_2| < |x_1|$

Szemléltetés

Csill-rez_kicskocsi_rövid.avi [0:49]

CsillRez-Pohl_rövid.avi [1:10]

A sebességgel arányos csillapító erő

A tömegpontra ható erők: $\underbrace{F = -Dx,}_{\text{rugalmas erő}}$ $\underbrace{F_S = -k\dot{x}}_{\text{súrlódási erő}}$

Mozgásegyenlet:

$$m\ddot{x} = F + F_S = -Dx - k\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,} \quad \text{ahol} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{és} \quad \beta = \frac{k}{2m}$$

Az egyenlet megoldásainak típusai

- $\beta < \omega_0$ esetén csillapodó rezgés

$$\boxed{x(t) = Ae^{-\beta t}\sin(\omega t + \alpha),}$$

ahol $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

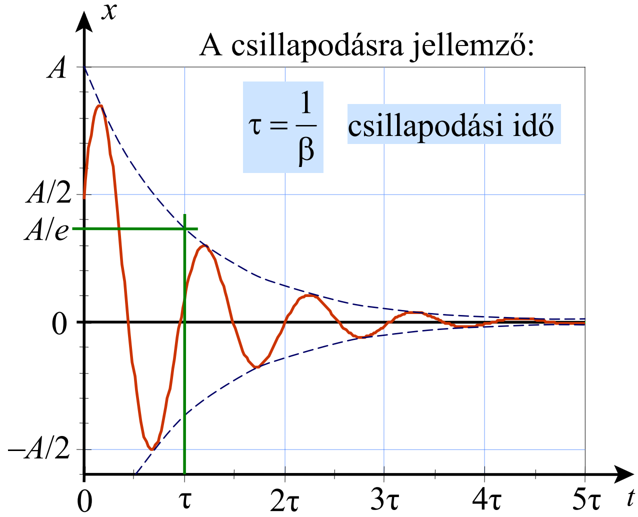
Az A és α állandókat a kezdeti feltételek határozzák meg.

Átírható a következő alakba is:

$$x(t) = c_1 e^{-\beta t}\cos\omega t + c_2 e^{-\beta t}\sin\omega t$$

A csillapodásra jellemző:

$\tau = \frac{1}{\beta}$ csillapodási idő



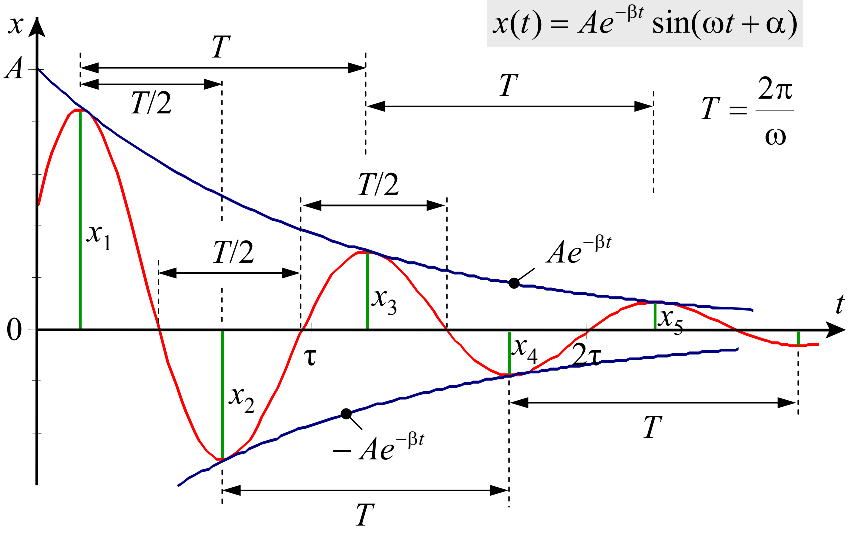
- $\beta > \omega_0$ esetén aperiodikus mozgás $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} < 0$

- $\beta = \omega_0$ esetén aperiodikus határeset $x(t) = c_1 e^{-\beta t} + c_2 t e^{-\beta t}$.

A csillapodó rezgés tulajdonságai és jellemző mennyiségei

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\sin(\omega t + \alpha) \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- A csillapodás mértékét a β **csillapítási állandó** és a τ = 1/β **csillapodási idő** jellemzi.
- A maximális kitérések és a burkoló érintési helyei $T/2$ időközönként követik egymást.
- Az egyensúlyi helyzeten $T/2$ időnként halad át.
- Az egyensúlyi helyzetből a maximumig azonban $T/4$-nél rövidebb, a maximumtól a egyensúlyi helyzetig $T/4$-nél hosszabb idő telik el.



- A szomszédos azonos oldali maximális kitérések hányadosa állandó. Ez a K hányados a **csillapodási hányados**:

$$\boxed{K = \frac{x_1}{x_3} = \frac{x_3}{x_5} = \ldots = \frac{x_{2k-1}}{x_{2k+1}}} \quad \text{és} \quad \boxed{K = \frac{x_2}{x_4} = \frac{x_4}{x_6} = \ldots = \frac{x_{2k}}{x_{2k+2}}}$$

- **Logaritmikus dekrementum:** $\boxed{\Lambda = \ln K}$

$$K = \frac{x_1}{x_3} = \frac{x(t_1)}{x(t_1+T)} = \frac{Ae^{-\beta t_1}\sin(\omega t_1 + \alpha)}{Ae^{-\beta(t_1+T)}\sin[\omega(t_1+T)+\alpha]} = e^{\beta T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Lambda = \beta T}$$

Kényszerrezgés, rezonancia

- A rezgő rendszerre rugalmas erőn és a sebességgel arányos súrlódási erőn kívül még egy külső zavaró, periodikus erő is hat:

$$\underbrace{F = -Dx,}_{\text{rugalmas erő}} \qquad \underbrace{F_S = -k\dot{x},}_{\text{súrlódási erő}} \qquad \underbrace{F_G = F_0 \sin\omega t.}_{\text{gerjesztő erő}}$$

Mozgásegyenlet:

$$m\ddot{x} = F + F_S + F_G = -Dx - k\dot{x} + F_0\sin\omega t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \sin\omega t,} \quad \text{ahol}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}, \qquad \beta = \frac{k}{2m} \qquad \text{és} \qquad a_0 = \frac{F_0}{m}$$

Kísérleti szemléltetés

- Tömeg-rugó rendszer
- Pohl-féle készülék
- Ingák

Kény-rez_Pohl_rövid.avi [2:15]

Kény-rez_ingák_rövid.avi [0:57]

Az egyenlet megoldása:

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega t - \delta) + x_{cs}(t)}$$

- A csillapodó rezgés differenciálegyenletének megoldása, bizonyos idő után elhanyagolható (tranziens jelenségek).
- Állandósult rezgés, kényszerrezgés
  - frekvenciája megegyezik a gerjesztés frekvenciájával!
  - Az amplitúdó és a fáziskésés függ a gerjesztés frekvenciájától

$$\boxed{A = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}} \qquad \boxed{\mathrm{tg}\,\delta = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

A megoldás meghatározása forgó vektorokkal

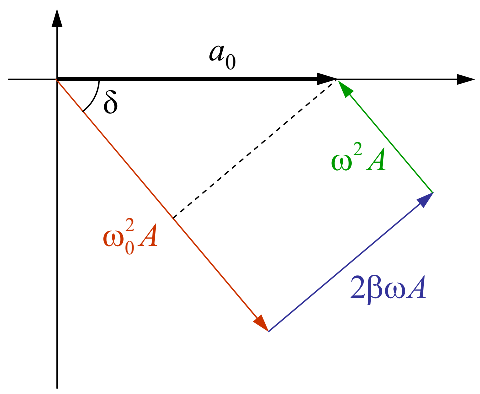
Ha $x(t) = A\sin(\omega t - \delta)$, akkor

$$\dot{x}(t) = A\omega \cdot \cos(\omega t - \delta) = A\omega \cdot \sin(\omega t - \delta + \pi/2)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t - \delta) = A\omega^2 \cdot \sin(\omega t - \delta + \pi)$$

Az $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \sin\omega t$ egyenlet azt fejezi ki, hogy a bal oldalán álló harmonikus rezgések összege a jobb oldalon látható harmonikus rezgés.

A rezgések összeadását szemléltető forgó vektorok a következők:



$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{2\beta\omega A}{A\omega_0^2 - A\omega^2}$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\delta = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

Pitagorasz-tétel:

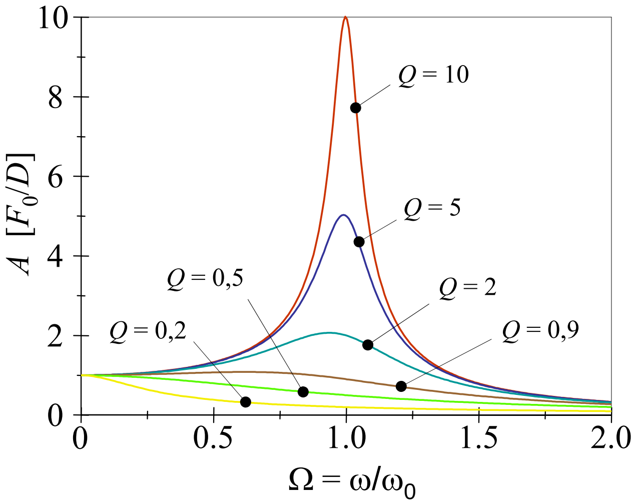
$$a_0^2 = (A\omega_0^2 - A\omega^2)^2 + (2\beta\omega A)^2$$

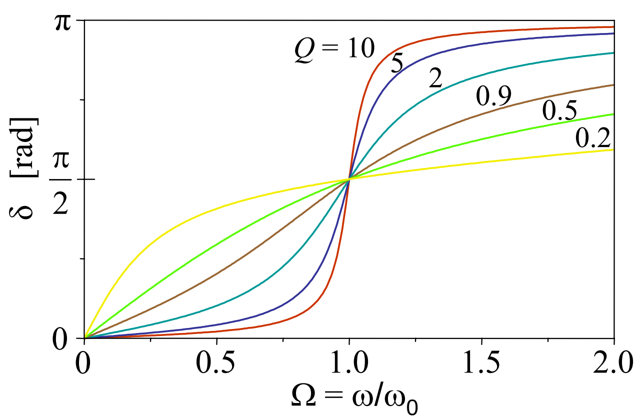
$$\boxed{A = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}}$$

Rezonanciagörbe

Ha $\Omega = \omega/\omega_0$ és $Q = \dfrac{\omega_0}{2\beta}$ (jósági tényező) mennyiségeket bevezetjük, akkor egyszerű számolással:

$$\boxed{A = \frac{F_0/D}{\sqrt{\left(1-\Omega^2\right)^2 + (\Omega/Q)^2}}},\qquad \boxed{\mathrm{tg}\,\delta = \frac{1}{Q}\cdot\frac{\Omega}{1-\Omega^2}},$$





- A rezonanciagörbének Q nagyobb értékeire éles maximuma van az $\omega = \omega_0$ helyen!
- Ez a rezonancia jelensége, ekkor maximális a kialakult kényszerrezgés amplitúdója.
- Rezonancia akkor lép fel, ha gerjesztés frekvenciája megegyezik a rezgő rendszer sajátfrekvenciájával ($\omega = \omega_0$).

Rezonancia katasztrófa

Az előző kísérletek és a számolás is azt mutatja, hogy rezonancia esetén még az igen kicsi gerjesztés is igen nagy amplitúdójú rezgésekre kényszerítheti a rendszert.

Ezt a jelenséget épületek, hidak és járművek (stb) tervezésénél figyelembe kell venni!

Ilyen külső gerjesztő hatásként léphetnek fel például

- a szél következtében periodikusan leváló örvények,
- földrengés során a talaj rezgései, stb.

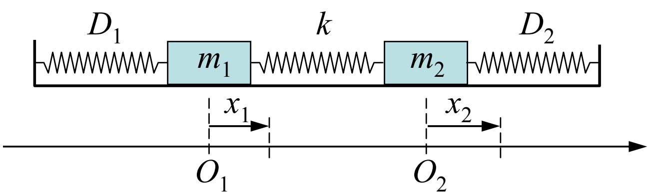
Tacoma-híd [3:54]

A kényszerrezgések fontosabb alkalmazásai

- igen kicsi hatások kimutatása (pl. Eötvös-effektus),
- rezgések frekvenciájának meghatározása (pl. nyelves frekvenciamérő),
- sajátrezgések kimutatása és sajátfrekvenciák meghatározása,
- rezgések regisztrálása,
- földrengések regisztrálása (szeizmográf), (stb).

Csatolt rezgések

Kísérlet kiskocsikkal ($m_1 \neq m_2$) [0:37]



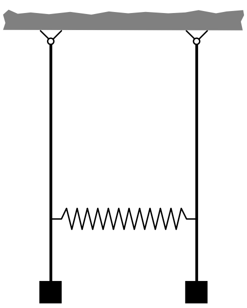
Hogyan magyarázhatjuk a bonyolult mozgást?

Mozgásegyenletek

$$m_1 \ddot{x}_1 = -D_1 x_1 - k(x_1 - x_2)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -D_2 x_2 - k(x_2 - x_1)$$

Kísérlet kettős-ingával [0:41]



Ekkor a jelenség tanulmányozása egyszerűbb, mivel

- a két csatolt rezgő rendszer teljesen azonos,
- a csatolás gyengébb.

a mozgásegyenletek egyszerűsödnek

$m_1 = m_2 = m \qquad D_1 = D_2 = D$

A kísérlet értelmezése

- Az ingák mozgása lebegés!
- Ez azt mutatja, hogy egyszerre végeznek két különböző, de közeli frekvenciájú harmonikus rezgést, hiszen a lebegés két ilyen rezgés összege.
- A kezdeti feltételek *megfelelő* megválasztásával elérhetjük, hogy a két rezgés közül csak az egyik mutatkozzon meg.

Szemléltetés

Azonos fázisú sajátrezgés

Ellentétes fázisú sajátrezgés

A mozgásegyenletek megoldása azonos oszcillátorok esetén

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -Dx_1 - k(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -Dx_2 - k(x_2 - x_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) &= -Dx_1 - Dx_2 \\ m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) &= -Dx_1 + Dx_2 - k(x_1 - x_2) + k(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\frac{D}{m}(x_1 + x_2) \Leftrightarrow \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = 0, \quad \text{ahol} \quad q_1 = x_1 + x_2 \quad \text{és} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\frac{D+2k}{m}(x_1 - x_2) \Leftrightarrow \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = 0, \quad \text{ahol} \quad q_2 = x_1 - x_2 \quad \text{és} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{D+2k}{m}}$$

$$q_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1)$$
$$q_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

q_1 és q_2 az u.n. normál koordináták

$$x_1 = (q_1 + q_2)/2$$
$$x_2 = (q_1 - q_2)/2$$

$$x_1(t) = \frac{A_1}{2}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{A_2}{2}\sin(\omega_2 t + \alpha_2),$$
$$x_2(t) = \frac{A_1}{2}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) - \frac{A_2}{2}\sin(\omega_2 t + \alpha_2),$$

- Tehát, a tömegpontok mozgása két harmonikus rezgés összege.
- Ha a csatolás gyenge ($k \ll D$), akkor a két frekvencia közeli, így lebegés jön létre.
- Hogyan érhetjük el, hogy a mozgásban **csak** az egyik rezgés jelenjen meg?

- A q_1-hez vagy q_2-höz tartozó rezgés eltűnéséhez nyílván $A_2 = 0$ vagy $A_1 = 0$ szükséges.
- $A_2 = 0$ esetén csak az ω_1 körfrekvenciájú rezgés van jelen.

$$A_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} q_2(0) &= x_1(0) - x_2(0) = 0 \\ \dot{q}_2(0) &= \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0) = 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) \\ v_1(0) &= v_2(0) \end{aligned}$$

$$x_1(t) = (A_1/2)\cdot\sin(\omega_1 t + \alpha_1)$$
$$x_2(t) = (A_1/2)\cdot\sin(\omega_1 t + \alpha_1)$$

Azaz mindkét tömegpont ω_1 körfrekvenciájú – vagyis azonos frekvenciájú – harmonikus rezgést végez és a rezgések fázisa megegyezik!

- $A_1 = 0$ esetén viszont csak az ω_2 körfrekvenciájú rezgés jelenik meg!

$$A_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} q_1(0) &= x_1(0) + x_2(0) = 0 \\ \dot{q}_1(0) &= \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0) = 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1(0) &= -x_2(0) \\ v_1(0) &= -v_2(0) \end{aligned}$$

$$x_1(t) = (A_2/2)\cdot\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$
$$x_2(t) = -(A_2/2)\cdot\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

Azaz mindkét tömegpont ω_2 körfrekvenciájú – vagyis azonos frekvenciájú – harmonikus rezgést végez és a rezgések fázisa ellentétes!

Sajátrezgések

a rezgő rendszer azon rezgései, mikor a rendszer minden tagja **azonos** frekvenciájú harmonikus rezgést végez azonos vagy ellentétes fázisban.

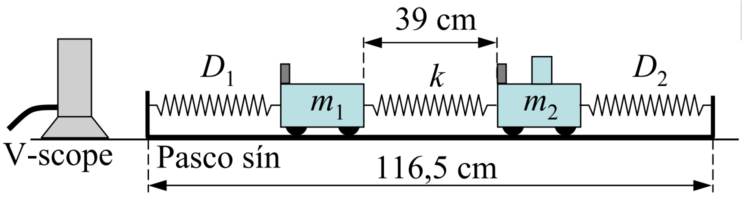
- A sajátrezgések frekvenciáit sajátfrekvenciáknak nevezik.
- Megmutatható, hogy általában egy f szabadági fokú rendszernek f darab sajátrezgése van. A rendszer általános mozgása a sajátrezgéseinek az összege (szuperpozíciója).

- Nem azonos oszcillátorok esetén a mozgásegyenletet nehezebb megoldani, azonban ekkor is megmutatható, hogy a tömegpontok mozgása két harmonikus rezgés összege

$$x_1(t) = c_{11} \cdot A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + c_{12} \cdot A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

$$x_2(t) = c_{21} \cdot A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + c_{22} \cdot A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

- A sajátfrekvenciák és a hozzájuk tartozó sajátrezgések mozgáshoz való hozzájárulását leíró c_{11}, c_{12}, c_{21} és c_{22} együtthatók meghatározása nehezebb.
- A sajátrezgések kísérleti szemléltetése kiskocsikkal (Pasco, m = 0,5 kg):



Mért adatok:

D_1 = 43,73 N/m D_2 = 42,12 N/m

m_1 = 0,52 kg m_2 = 0,72 kg

k = 25,9 N/m

Számolt sajátkörfrekvenciák: ω_1 = 12,68 Hz (T_1 = 0,76 s), ω_2 = 19,74 Hz (T_2 = 0,50 s)

Az együtthatók viszonya: $c_{21} = 1{,}3333 \cdot c_{11}$, $c_{22} = -0{,}5417 \cdot c_{12}$

Azonos fázisú sajátrezgés (1)

$x_2(0) = 1{,}3333 \cdot x_1(0)$, $v_2(0) = 1{,}3333 \cdot v_1(0)$

$x_2(0) = \pm 8$ cm, $x_1(0) = \pm 6$ cm, $v_2(0) = v_1(0) = 0$

Ellentétes fázisú sajátrezgés (2)

$x_2(0) = -0{,}5417 \cdot x_1(0)$, $v_2(0) = -0{,}5417 \cdot v_1(0)$

$x_2(0) = \pm 3{,}25$ cm, $x_1(0) = \mp 6$ cm, $v_2(0) = v_1(0) = 0$

Belátható, hogy a rezgő rendszer mechanikai energiája a sajátrezgések energiáinak összege.

harmonikus rezgés energiája:
$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2\right)$$

A vizsgált rendszer energiája
$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} D_1 x_1^2 + \frac{1}{2} D_2 x_2^2 + \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2$$

$m_1 = m_2 = m$, $D_1 = D_2 = D$ esetén
$$E = \frac{1}{2} m \left[\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right] + \frac{1}{2} D \left[x_1^2 + x_2^2\right] + \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2$$

Az energiát megadó képletbeli mennyiségeket kifejezhetjük a normálkoordinátákkal:
$$\left.\begin{aligned} q_1 &= x_1 + x_2 \\ q_2 &= x_1 - x_2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= (q_1 + q_2)/2 \\ x_2 &= (q_1 - q_2)/2 \end{aligned}\right.$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{q_1^2 + 2 q_1 q_2 + q_2^2}{4} + \frac{q_1^2 - 2 q_1 q_2 + q_2^2}{4} = \frac{q_1^2 + q_2^2}{2}$$

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = \frac{\dot{q}_1^2 + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2}{4} + \frac{\dot{q}_1^2 - 2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2}{4} = \frac{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}{2}$$

$$E = \frac{1}{2} m \frac{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}{2} + \frac{1}{2} D \frac{q_1^2 + q_2^2}{2} + \frac{1}{2} k q_2^2 = \frac{1}{2} \frac{m}{2} \left[\dot{q}_1^2 + \frac{D}{m} q_1^2\right] + \frac{1}{2} \frac{m}{2} \left[\dot{q}_2^2 + \frac{D + 2k}{m} q_2^2\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2} \mu_1 \left[\dot{q}_1^2 + \omega_1^2 q_1^2\right] + \frac{1}{2} \mu_2 \left[\dot{q}_2^2 + \omega_2^2 q_2^2\right]}$$

Általánosabban f szabadsági fokú rendszer esetén:
$$\boxed{E = \sum_{i=1}^{f} \frac{1}{2} \mu_i \left(\dot{q}_i^2 + \omega_i^2 q_i^2\right)}$$

További példák és alkalmazások csatolt rezgésekre

- Wilberforce-inga
- Paraméteres inga
- Rezgések csillapítása (hajók: Frahm-féle tank, felhőkarcolók)