Hullámtan

A hullám fogalma. A hullámok osztályozása.

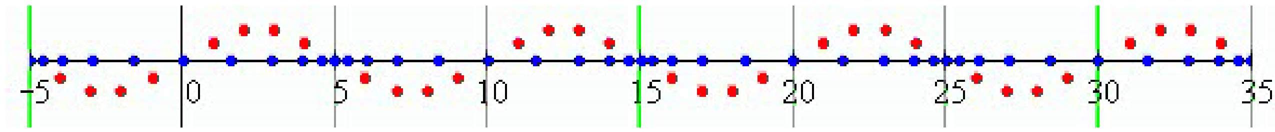
Kísérletek

- Kis súlyokkal összekötött ingsor elején keltett rezgés átterjed a többi ingára is [0:26]
- Kifeszített gumikötélen keltett zavar végig fut a kötélen [0:08]
- Kifeszített rugón keltett zavar végig fut a rugón [0:05, lassított]
- Kifeszített drótszál elejét hirtelen megcsavarva, majd a csavarást megszüntetve, a szál többi része időben késve megtekeredik (Julius-féle hullámgép) [0:02]
- Vízfelszínen zavart keltve, a vízfelszín többi része később mozgásba jön [0:07]
- Szemléltetés filmekről (lökéshullám, hőmérsékleti hullám, stb)

Ezek a jelenségek mind azt szemléltetik, hogy rugalmas közegben keltett deformáció (zavar) a közegben tovaterjed.

Hullám

Valamilyen közeg kis tartományában keltett, a közegben tovaterjedő zavar.



Hullámforrás

A zavar forrása, vagyis a zavart létrehozó tárgy.

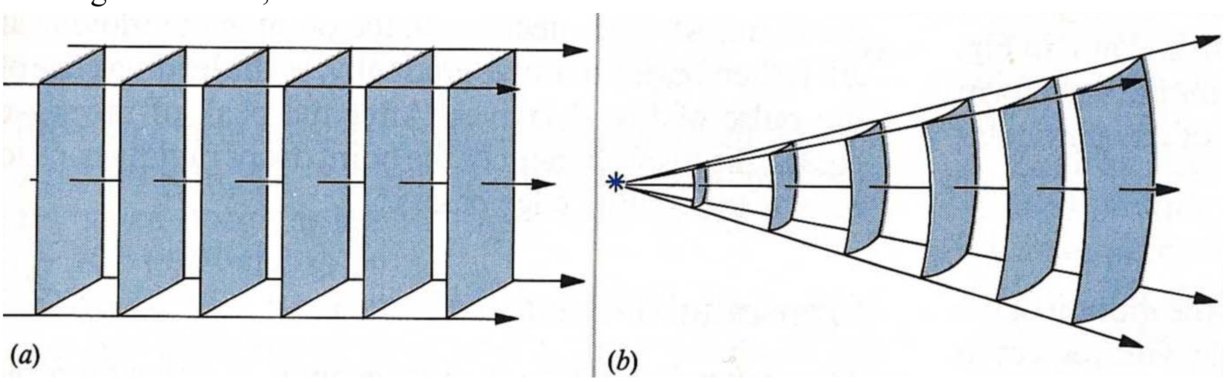
A hullámok típusai (több szempont alapján)

A közeg dimenziója alapján beszélhetünk

- egyenes mentén (általánosabban pontsoron) terjedő hullámokról, (pl. rezgő húr)
- felületi hullámokról (pl. vízhullámok),
- térbeli hullámokról (pl. hang, fény).

A hullámfelületek alakja alapján beszélhetünk például

- síkhullámról,
- gömbhullámról,
- hengerhullámról, stb.



A rezgő mennyiség iránya és a hullám terjedési irányának viszonya alapján beszélünk *longitudinális* és *transzverzális* hullámról,

- longitudinális hullám esetén a rezgés a terjedési irány mentén megy végbe,
- transzverzális hullám esetén a rezgés iránya a terjedési irányra merőleges.

A tér- és időbeli lefutás alapján a hullám lehet például
- periodikus hullámok
  - szinuszos vagy monokromatikus hullám, [0:06]
  - háromszög, négyszög, fűrészfog, stb.
- nem-periodikus hullámok
  - csupán néhány periódust tartalmazó hullámcsomag (impulzus), [0:06]
  - zaj

A rezgő fizikai mennyiség típusa alapján a hullám lehet például
- elektromágneses hullám (pl. fény, rádióhullám),
- rugalmas hullám (pl. hang, földrengéshullám),
- vízhullám, (stb).

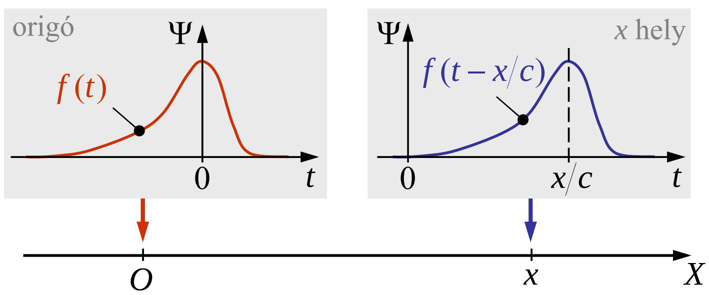
A hullámban különböző fizikai mennyiségek terjednek, például:
- fázis (rezgési állapot),
- energia,
- impulzus,
- Impulzusmomentum, (stb).

Pontsor mentén terjedő hullámok

Milyen matematikai képlettel írható le ideális esetben – azaz torzulás és csillapodás nélkül – az *x* tengely mentén terjedő hullám?

- Az egyszerűség kedvéért vizsgáljunk transzverzális hullámot (könnyebben ábrázolható).
- Az *t* időpontban a pontsor *x* koordinátájú helyén jelölje Ψ a kitérést.
- Milyen matematikai képlettel írható le $\Psi = \Psi(x,t)$ függvény?

Adott helyen az időfüggést vizsgálva

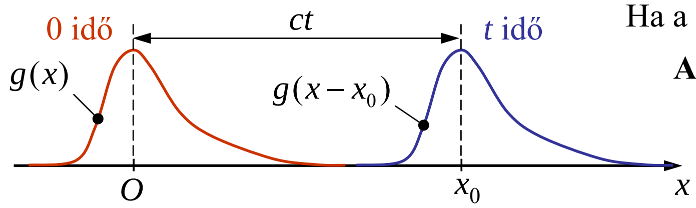


Ha az origóból kiinduló zavar *c* sebességgel terjed, akkor az *x* helyen *x*/*c* idővel később lesz ugyanaz a kitérés, mint az origóban a *t* időpontban volt.

$$\boxed{\Psi(x,t) = f(t - x/c)}$$

$f(t)$ a hullám időbeli alakjára jellemző!

Adott időben a helyfüggést vizsgálva



Ha a zavar *c* sebességgel terjed, akkor $x_0 = ct$

A kitérés hely- és időfüggését leíró képlet

$$\boxed{\Psi(x,t) = g(x - ct)}$$

$g(x)$ a hullám térbeli alakjára jellemző!

Nyílván a két nézőpont nem független egymástól, a kapcsolat közöttük: $g(x) = f(-x/c)$

Harmonikus (szinuszos) hullám

A tér minden pontjában a hullámban rezgő fizikai mennyiség ω körfrekvenciájú harmonikus rezgést végez.

Szinuszos hullámra az időbeli függést leíró függvény: $f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$

Az x pontsoron terjedő szinuszos hullám formulája:

$$\boxed{\Psi(x,t) = A\cdot\sin\left[\omega\cdot\left(t-\frac{x}{c}\right)+\alpha\right]}$$

A a hullám **amplitúdója**

Hullámhossz

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ összefüggést felhasználva $\Psi(x,t) = A\cdot\sin\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{cT}\right)+\alpha\right]$

$$\boxed{\Psi(x,t) = A\cdot\sin\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\alpha\right]}$$

ahol $\boxed{\lambda = cT}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{c = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu}$

- Ebből az alakból látható, hogy a szinuszos hullám térben és időben periodikus
  - Adott helyen (rögzített x esetén) az időbeli periódus T,
  - Adott időben (rögzített t esetén) a térbeli periódus λ.
- A λ térbeli periódust **hullámhossznak** nevezik.
- Mivel λ a térbeli periódus, nyílván az azonos fázisú helyek között is λ távolság van!

Hullámszám

$$\boxed{\Psi(x,t) = A\cdot\sin(\omega t - kx + \alpha)}$$

ahol $\boxed{k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}}$ körhullámszám

$\bar{k} = \dfrac{1}{\lambda}$ hullámszám,

Szinuszos hullám fázisa

$$\boxed{\varphi(x,t) = \omega\cdot\left(t-\frac{x}{c}\right)+\alpha = 2\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\alpha = \omega t - kx + \alpha}$$

Szinuszos hullám fázissebessége

- Az animációból látszik, hogy a kitérés (és ennek megfelelően a fázis) időben késve a pontsor jobbra eső helyein ugyanazon értékeket veszi fel,
- azaz, a pontsor mentén (más fizikai mennyiségek mellett) a fázis tovaterjed!
- Mekkora a **fázis** terjedési sebessége, az u.n. **fázissebesség**?
- A t időpontban az x helyen Φ a fázis,
- Mivel a fázis terjed a pontsor mentén, Δt idővel később (azaz $t+\Delta t$ időpontban) Δx távolságra (azaz az $x+\Delta x$ helyen) szintén Φ lesz a fázis.
- Ekkor nyílván a fázis terjedési sebessége $v_f = \Delta x/\Delta t$.

$$\left.\begin{aligned}\Phi &= \omega t - kx + \alpha\\ \Phi &= \omega(t+\Delta t) - k(x+\Delta x) + \alpha\end{aligned}\right] \Rightarrow \left.\begin{aligned}\omega\cdot\Delta t - k\cdot\Delta x &= 0\\ v_f &= \frac{\Delta x}{\Delta t}\end{aligned}\right] \Rightarrow \boxed{v_f = \frac{\omega}{k} = c}$$

Hullámok polarizációja

- Longitudinális hullámnál a rezgések a terjedési irány mentén mennek végbe. Így a terjedési irányon kívül nincs más **kitüntetett** (a megfigyelt jelenséget befolyásoló) irány.
- Ha a terjedési irányon kívül más kitüntetett irány is van a hullámterjedés során, akkor azt mondjuk, hogy a hullám **poláros**.
- Transzverzális hullámnál a rezgések a terjedési irányra merőlegesen mennek végbe. Így a terjedési irányon kívül lehetséges más **kitüntetett** irány.

- Ezek alapján a transzverzális hullámok **polárosak** lehetnek.

  A kitüntetett irány létét gumikötélen terjedő hullámra egy réssel szemléltethetjük. [0:54]

Poláros hullámok fontosabb típusai

- Lineárisan poláros (vagy síkban poláros) hullám

  A rezgések a terjedési irányon átfektetett, időben állandó helyzetű síkban mennek végbe.

  A rezgő fizikai mennyiség a tér pontjaiban azonos irányú lineárisan poláros rezgést végez. A rezgések között a hullám fázisának megfelelő fáziskülönbség van.

- Elliptikusan poláros hullám

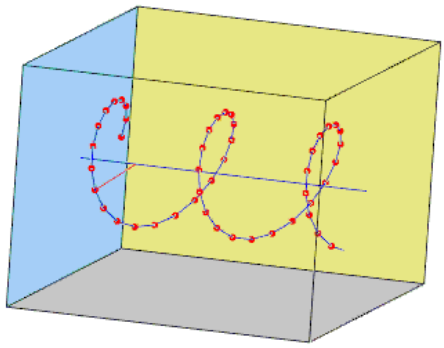
  A rezgések a terjedési irányra merőleges síkban egy ellipszis mentén mennek végbe.

  A rezgő fizikai mennyiség a tér pontjaiban ellipszisben poláros rezgést végez. A rezgések között a hullám fázisának megfelelő fáziskülönbség van.

- Cirkulárisan poláros (vagy körben poláros) hullám

  Az elliptikusan poláros hullám speciális esete, a rezgések a terjedési irányra merőleges síkban egy kör mentén mennek végbe.

  A rezgő fizikai mennyiség a tér pontjaiban körben poláros rezgést végez. A rezgések között a hullám fázisának megfelelő fáziskülönbség van.



Pontsor mentén terjedő hullámok interferenciája

- **Interferencia**

  Azon jelenségek összessége, melyek akkor figyelhetők meg, ha a tér egy adott pontjában egyszerre két vagy több hullám találkozik.

  A jelenség értelmezésénél fontos szerepet játszik a *szuperpozíció elve*.

- **Szuperpozíció elve**

  A találkozó hullámok egymás terjedését nem befolyásolják, a megfigyelhető hullámhatás a hullámban rezgő fizikai mennyiségek összege. (szemléltetés)

  Ez az elv a legtöbb hullám terjedésére érvényes. Az olyan közeget, amelyre érvényes a szuperpozíció elve lineáris közegnek nevezik.

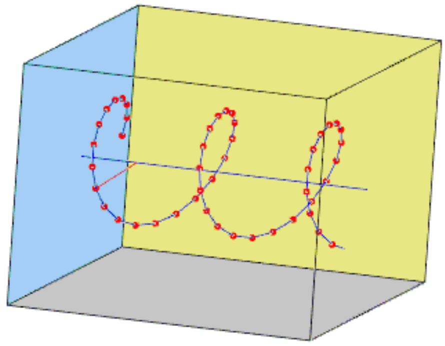
- **Azonos frekvenciájú szinuszos hullámok interferenciája**

  Harmonikus hullám esetén a tér adott pontjában egy harmonikus rezgés alakul ki, így interferencia esetén harmonikus rezgések adódnak össze. Ezért az interferencia leírásához a harmonikus rezgések összeadásánál megállapított összefüggéseket kell alkalmazni.

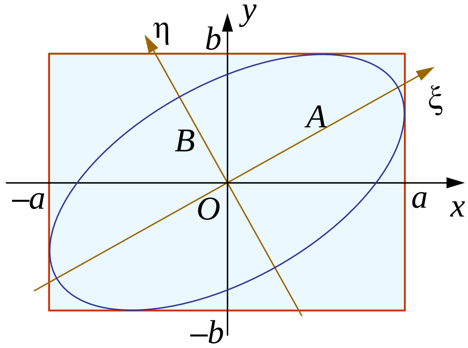
  Két azonos síkban lineáris poláros hullám interferenciájánál

  - az eredő hullám a találkozó hullámokkal azonos frekvenciájú és azonos síkban poláros hullám, melyen amplitúdóját és kezdőfázisát az azonos irányú rezgések összeadásánál megismert képletek adják meg. (szemléltetés)
  - Ez alapján, a találkozó hullámok maximálisan **erősítik** egymást, ha a hullámok **azonos** fázisban találkoznak, és maximálisan **gyengítik** egymást, ha **ellentétes** fázisban találkoznak.

Két egymásra merőleges síkban lineáris poláros hullám interferenciájánál



- a két hullám összege egy ellipszisben poláros hullámot hoz létre, mivel általában két egymásra merőleges harmonikus rezgés összege egy ellipszisben poláros rezgés.
- Ha a két amplitúdója azonos és a fáziskülönbség $\pi/2$ vagy $3\pi/2$, akkor cirkulárisan (körben) poláros hullám jön létre.
- Ha két hullám azonos vagy ellentétes fázisban találkozik, akkor lineárisan (síkban) poláros hullám jön létre. A rezgési síkot a két amplitúdó aránya határozza meg.



Pontsor mentén terjedő hullámok visszaverődése

Kísérletek

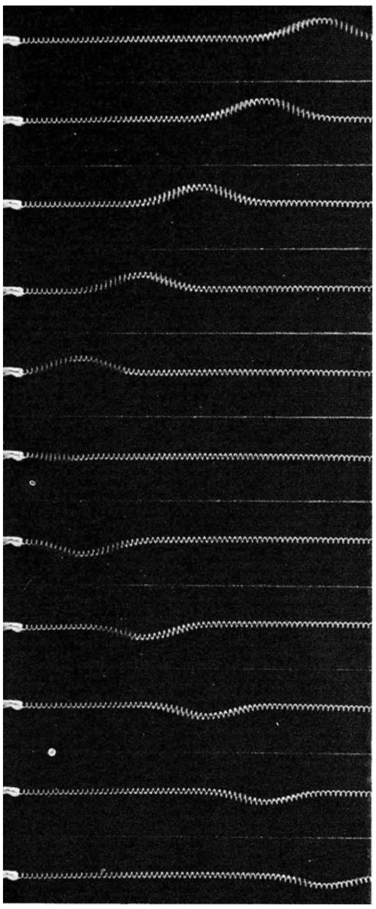
- Visszaverődés rögzített végről [0:08]

  A kísérletek szerint rögzített végről ellentétes fázisban verődik vissza a hullám. Harmonikus hullámokra ez π fázisugrást jelent.
- Visszaverődés szabad végről.

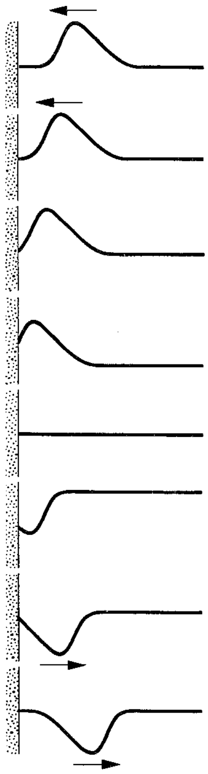
  A kísérletek szerint szabad végről azonos fázisban verődik vissza a hullám.

A visszaverődés szemléltetése

rögzített vég



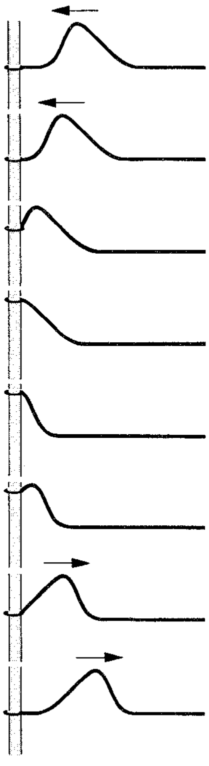
animáció



(a)

tükrözés (1)

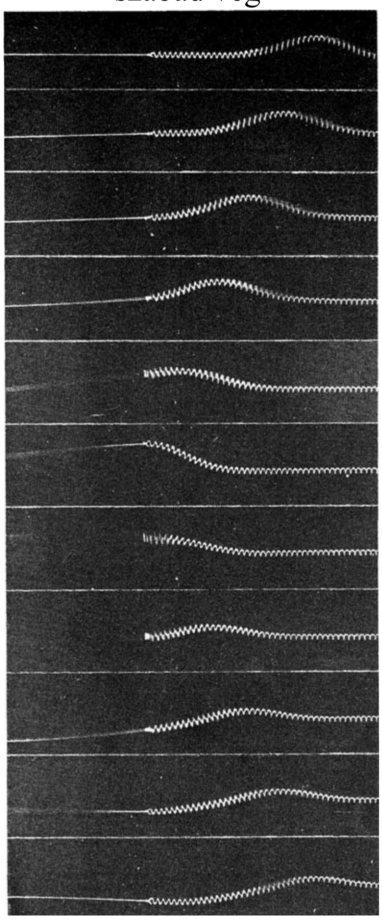
animáció



(b)

tükrözés (2)

szabad vég



Állóhullámok végtelen és véges pontsoron. Sajátrezgések és sajátfrekvenciák

- Láttuk, hogy a közeg határához érve a hullám visszaverődik. Ekkor a visszavert és a beeső hullám egymással találkozik, közöttük interferencia lép fel.
- Vizsgáljuk meg, hogy milyen hullám jön létre két egymással szembe haladó azonos amplitúdójú és azonos frekvenciájú szinuszos hullám interferenciája során!

$$\Psi_1(x,t) = A\cdot\sin\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\alpha_1\right] \qquad \Psi_2(x,t) = A\cdot\sin\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)+\alpha_2\right]$$

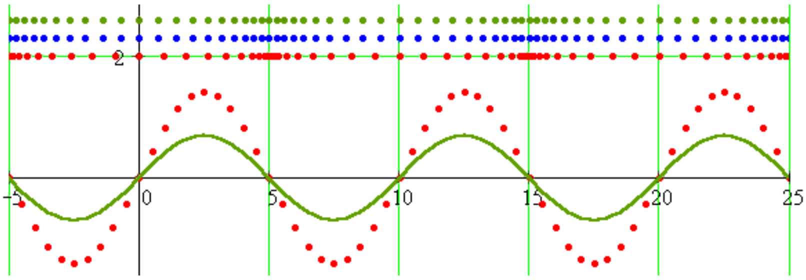
$$\Psi(x,t)=\Psi_1(x,t)+\Psi_2(x,t)= A\cdot\left\{\sin\underbrace{\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\alpha_1\right]}_{u}+\sin\underbrace{\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)+\alpha_2\right]}_{v}\right\}$$

$$\sin u+\sin v = 2\cdot\cos\frac{v-u}{2}\cdot\sin\frac{u+v}{2}$$

összefüggést felhasználva:

$$\boxed{\Psi(x,t)=2A\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)}$$

- A kialakult hullámot **állóhullámnak** nevezik.
- A $+x$ (vagy $-x$) irányba terjedő hullámot **haladó** hullámnak is szokás nevezni.



- Az animációból és a formulából is látható, hogy a pontsoron vannak olyan pontok, ahol a rezgés amplitúdója zérus. Ezeket a helyeket **csomópontoknak** hívjuk.
- Két szomszédos csomópont távolsága a hullámhossz fele ($\lambda/2$), ugyanis

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right)=0 \iff \frac{2\pi}{\lambda}x+\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}=\frac{\pi}{2}+m\pi=\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi \qquad (\text{ ahol } m\in Z\ )$$

Amiből az m indexhez tartozó csomópont helye $\quad x_m=\left(m+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\lambda}{2}-\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\cdot\frac{\lambda}{2\pi}$

Két szomszédos csomópont távolsága $\quad \Delta x = x_{m+1}-x_m=\lambda/2$

- Két szomszédos csomópont között középen – u.n. *duzzadóhelyeken* – a rezgés amplitúdója maximális. Két szomszédos duzzadóhely távolság szintén $\lambda/2$.
- **Két szomszédos csomópont között a rezgések fázisa azonos**, **a csomópontok ellentétes fázisban rezgő tartományokat választanak el**!
- Az álló- és haladó hullámok között lényeges **különbség** van a rezgések amplitúdójában és fázisában!

  Haladó hullámra az amplitúdó mindenhol A, míg álló hullámra helytől függően 0 és $2A$ között változik.

  A részecskék **azonos frekvenciájú harmonikus rezgést** végeznek, azonban állóhullám esetén **azonos** vagy **ellentétes** fázisban, míg haladó hullámnál a **helytől függően** fázisban különböznek! Haladó hullámban a fázis tovaterjed, az állóhullámban nem.

- Eddig nem vettük figyelembe, hogy a pontsor véges lehet. Látni fogjuk, hogy ez a kialakuló állóhullámok hullámhosszát (és így a frekvenciáit) korlátozza.
- Tekintsünk egy l hosszúságú pontsort!

$$0 \le x \le l$$

Pozitív irányba terjedő hullám

$$\Psi_1(x,t) = A \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

A pontsor végről visszavert hullám

szabad vég

$$\Psi_2^{(sz)}(x,t) = A \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{2l-x}{\lambda}\right)$$

$$\Psi(x,t) = \Psi_1(x,t) + \Psi_2^{(sz)}(x,t) =$$

$$A \cdot \left[\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{2l-x}{\lambda}\right)\right]$$

$$\boxed{\Psi(x,t) = 2A \cdot \cos 2\pi\frac{l-x}{\lambda} \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right)}$$

rögzített vég

$$\Psi_2^{(r)}(x,t) = -A \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{2l-x}{\lambda}\right)$$

$$\Psi(x,t) = \Psi_1(x,t) + \Psi_2^{(r)}(x,t) =$$

$$A \cdot \left[\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{2l-x}{\lambda}\right)\right]$$

$$\boxed{\Psi(x,t) = 2A \cdot \sin 2\pi\frac{l-x}{\lambda} \cdot \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right)}$$

Mindkét kifejezés egy állóhullámot ír le!

Az $x = l$ helyen duzzadó hely van.

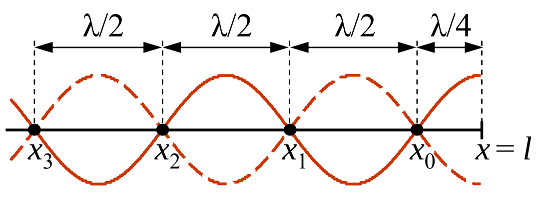
Az $x = l$ helyen csomópont van.

Hol vannak a csomópontok?

szabad vég

$$\cos 2\pi\frac{l-x}{\lambda} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi\frac{l-x}{\lambda} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$$

$$\boxed{x_m = l - \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda}{2}} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$



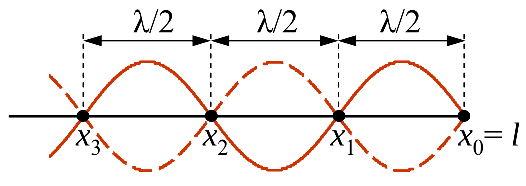
$$x_0 = l - \frac{\lambda}{4} \qquad \text{és} \qquad x_{m+1} = x_m - \frac{\lambda}{2},$$

Az első csomópont a szabad végtől λ/4 távolságra van, és a csomópontok közötti távolság λ/2.

rögzített vég

$$\sin 2\pi\frac{l-x}{\lambda} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi\frac{l-x}{\lambda} = m\pi$$

$$\boxed{x_m = l - m\frac{\lambda}{2}} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$



$$x_0 = l \qquad \text{és} \qquad x_{m+1} = x_m - \frac{\lambda}{2},$$

Az első csomópont a rögzített végnél van, és a csomópontok közötti távolság λ/2.

- Eddig csak egy visszaverődést vettünk figyelembe!
- Többszörös visszaverődések hatására bonyolult jelenség jön létre.
- Mikor alakulhatnak állóhullámok a pontsoron?

- Állóhullámok kialakulásához az szükséges, hogy a jobboldali végről visszavert hullám a baloldali végen **ismét** visszaverődve **megegyezzen** a kezdeti hullámmal.

Mindkét vég szabad

kezdeti hullám

$$\Psi_1(x,t) = A\cdot\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

jobboldali végről visszavert hullám

$$\Psi_2^{(sz)}(x,t) = A\cdot\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{2l-x}{\lambda}\right)$$

A baloldali végről visszavert hullám megegyezik a kezdeti hullámmal, ha

$$\Psi_1(0,t) = \Psi_2^{(sz)}(0,t) \Leftrightarrow 2\pi\frac{2l}{\lambda} = 2m\pi \Leftrightarrow \boxed{l = m\frac{\lambda_m}{2}}$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots$$

Mindkét vég rögzített

kezdeti hullám

$$\Psi_1(x,t) = A\cdot\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

jobboldali végről visszavert hullám

$$\Psi_2^{(r)}(x,t) = -A\cdot\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{2l-x}{\lambda}\right)$$

A baloldali végről visszavert hullám megegyezik a kezdeti hullámmal, ha

$$\Psi_1(0,t) = -\Psi_2^{(r)}(0,t) \Leftrightarrow 2\pi\frac{2l}{\lambda} = 2m\pi \Leftrightarrow \boxed{l = m\frac{\lambda_m}{2}}$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots$$

rögzített végen π fázisugrás lép fel

Egyik vég szabad (baloldali), másik rögzített (jobboldali)

kezdeti hullám

$$\Psi_1(x,t) = A\cdot\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

jobboldali végről visszavert hullám

$$\Psi_2^{(r)}(x,t) = -A\cdot\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{2l-x}{\lambda}\right)$$

A baloldali végről visszavert hullám megegyezik a kezdeti hullámmal, ha

$$\Psi_1(0,t) = \Psi_2^{(r)}(0,t) \Leftrightarrow 2\pi\frac{2l}{\lambda} + \pi = 2m\pi \Leftrightarrow \boxed{l = \left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_m}{2}}$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots$$

- Vagyis, elgondolásunk szerint egy l hosszúságú pontsoron csak olyan állóhullámok alakulhatnak ki, melyek hullámhossza teljesíti a fent levezetett feltételeket!

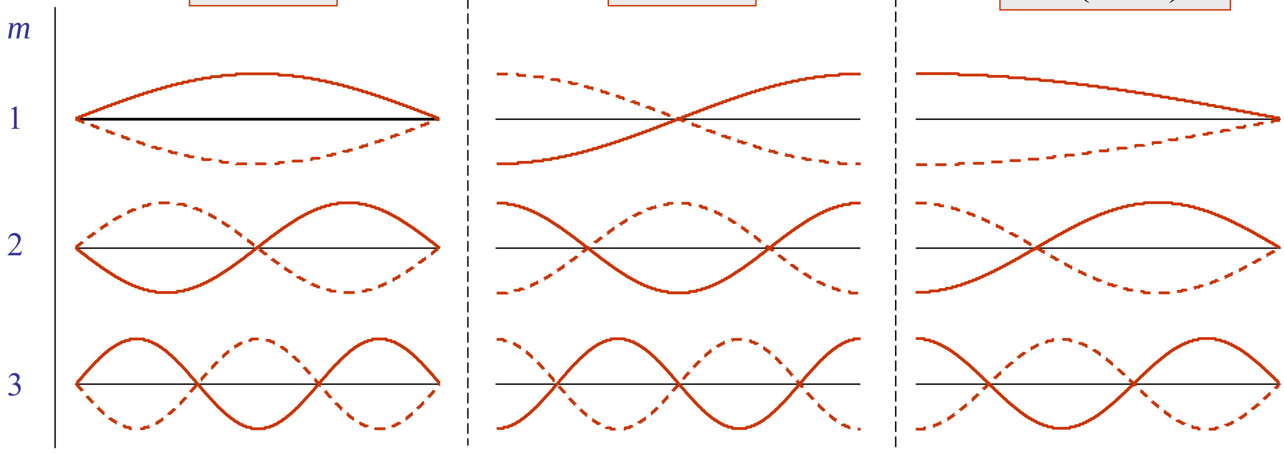
A pontsor sajátrezgései és sajátfrekvenciái

- Ha a pontsoron állóhullámok alakul ki, akkor a pontsor minden pontja ugyanolyan frekvenciájú **harmonikus** rezgést végez, **azonos** vagy **ellentétes** fázisban!
- Ez pedig éppen azt jelenti, hogy a pontsor lehetséges állóhullámai éppen a pontsor sajátrezgéseivel **azonosak**.
- Hasonlóan a kettős inga mozgásához, megmutatható, hogy a pontsor általános mozgása előállítható a sajátrezgések **szuperpozíciójaként**.
- Más szavakkal: a pontsoron terjedő **bármely** hullám a pontsor **állóhullámainak** az **összegeként** állítható elő.

- Mivel az állóhullámok hullámhossza nem lehet tetszőleges, így a hozzájuk tartozó frekvenciák – a **sajátfrekvenciák** – sem vehetnek fel tetszőleges értéket!

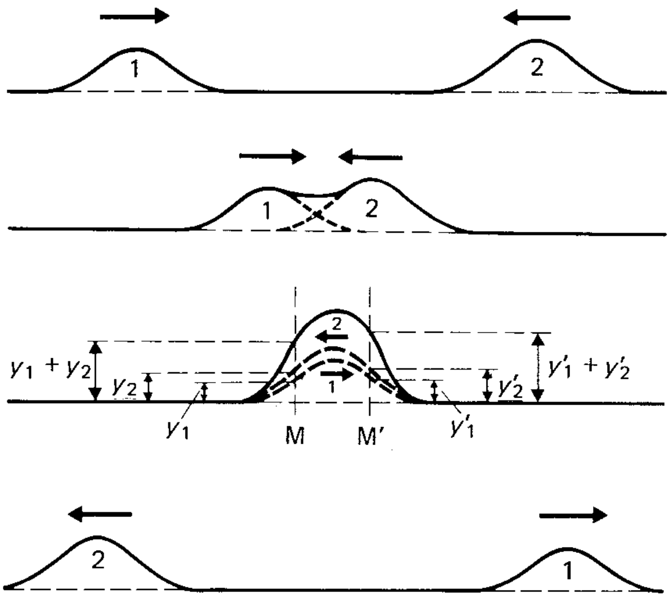
$$c = \lambda_m \cdot \nu_m \quad \Rightarrow \quad \nu_m = c/\lambda_m$$

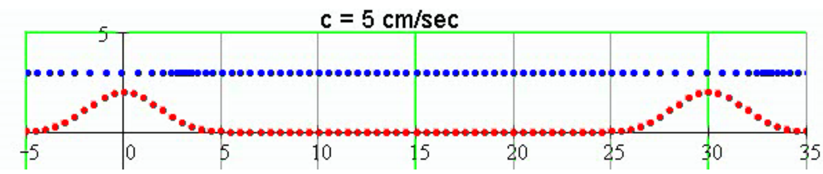
Mindkét vég rögzített	Mindkét vég szabad	Egyik vég szabad, másik rögzített
$l = m\dfrac{\lambda_m}{2}$	$l = m\dfrac{\lambda_m}{2}$	$l = \left(m-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda_m}{2}$
$\boxed{\nu_m = m\dfrac{c}{2l}}$	$\boxed{\nu_m = m\dfrac{c}{2l}}$	$\boxed{\nu_m = \left(m-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{c}{2l}}$



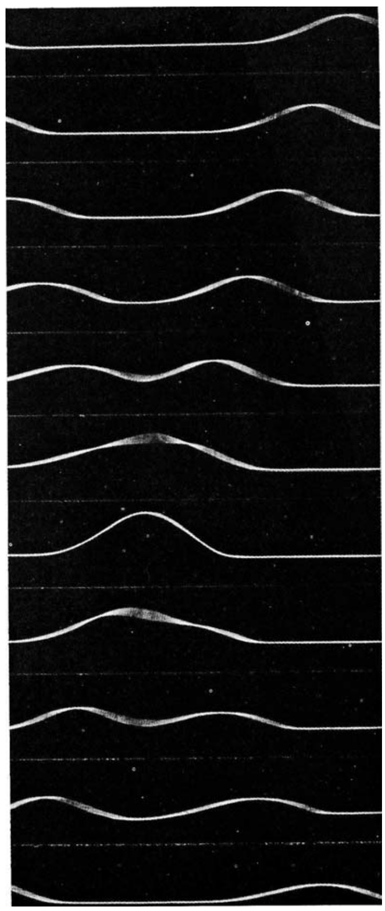
Szemléltetés: gumiszál Melde-féle készülék Julius-féle hullámgép

A szuperpozíció elvének szemléltetése (1)



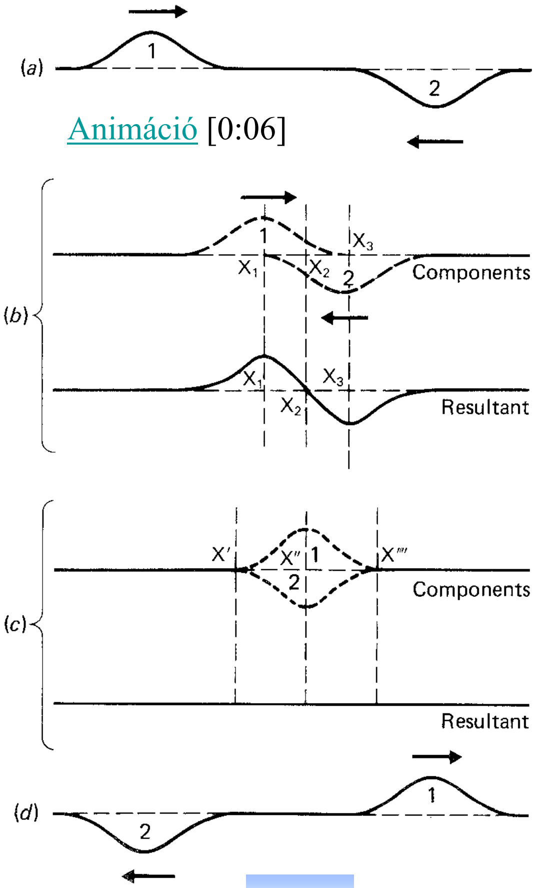


Animáció [0:06]



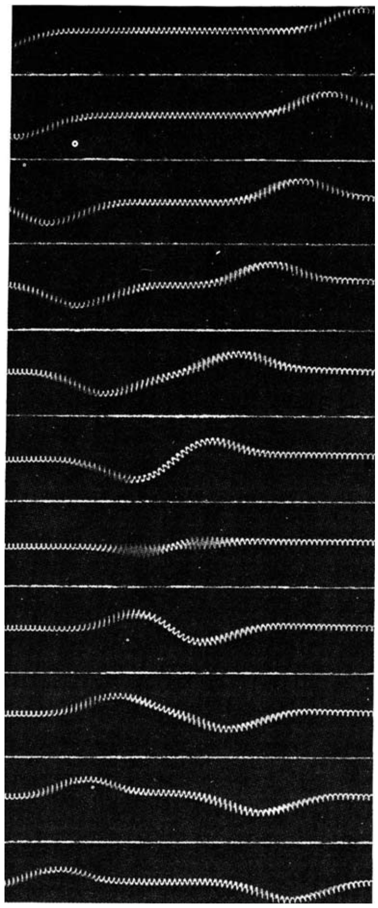
Szembe haladó hullámok rugón

A szuperpozíció elvének szemléltetése (2)



Animáció [0:06]

vissza



Szembe haladó hullámok rugón