Rugalmas hullámok terjedése. A hullámegyenlet és speciális megoldásai

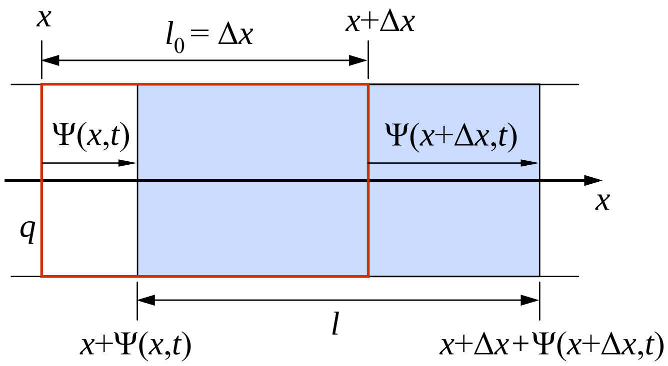
- Milyen hullámok alakulhatnak ki rugalmas közegben?
  Gázokban és folyadékokban csak longitudinális hullámok terjedhetnek.
  Szilárd közegben longitudinális és transzverzális hullámok is terjedhetnek
- Mekkora sebességgel terjed egy hullám? (a sebesség kapcsolata rugalmas állandókkal)
- Hogyan tudjuk meghatározni a deformáció idő- és helyfüggését, a kezdeti kitérés és a kezdeti sebesség ismeretében? (mozgásegyenlet)

Longitudinális hullám terjedése vékony rugalmas rúdban

- Milyen kapcsolat van a közeg pontjainak elmozdulása (Ψ) és rugalmas erőre jellemző mechanikai feszültség (σ) között?

Hooke-törvény:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E}\frac{F}{q} = \frac{\sigma}{E}$$



$$\Delta l = l - l_0$$

$$= [x + \Delta x + \Psi(x+\Delta x, t)] - [x + \Psi(x,t)] - \Delta x$$

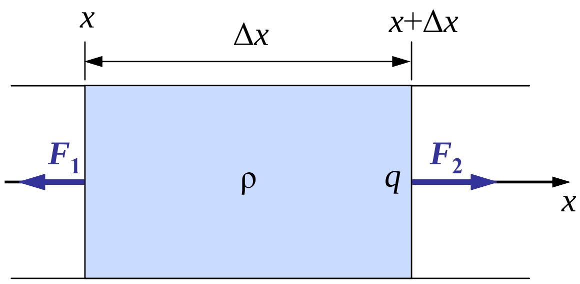
$$\Delta l = \Psi(x+\Delta x, t) - \Psi(x,t) = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \Delta x$$

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\sigma}{E}$$

A deformáció és a mechanikai feszültség kapcsolata:

$$\boxed{\sigma(x,t) = E \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x}}$$

- Hogyan mozog a kicsi Δx hosszúságú darab, ha rúdban $\sigma(x,t)$ feszültség van jelen?



$$\sigma(x,t) = E \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$F_2 - F_1 = m \cdot a$$

$$q \cdot \sigma(x+\Delta x, t) - q \cdot \sigma(x,t) = \Delta x\, q\, \rho \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

$$\sigma(x+\Delta x, t) - \sigma(x,t) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot \Delta x = E \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \cdot \Delta x$$

$$q \cdot E \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \cdot \Delta x = \Delta x\, q\, \rho \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad E \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad \Rightarrow$$

hullámegyenlet

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}}$$

ahol $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$

Transzverzális hullám terjedése vékony kifeszített húron

ρ sűrűségű, q keresztmetszetű,
F erővel feszített húr

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

ahol $c = \sqrt{\dfrac{F}{q\rho}}$

- Könnyű megmutatni, hogy a hullámegyenletnek tetszőleges f és g függvényekre a

$$\Psi(x,t) = f(t \mp x/c) \quad \text{és} \quad \Psi(x,t) = g(x \mp ct) \quad \text{megoldása!}$$

Háromdimenziós hullámegyenlet

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right)}$$

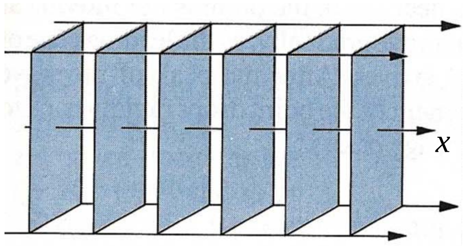
A hullámegyenlet szerepe

- dinamikai alapegyenlet (mozgásegyenlet)
- egyértelmű megoldásához szükséges
  kezdeti helyzet
  kezdeti sebesség
  határfeltételek (peremfeltételek)

- **Fontosabb speciális megoldások**

Az x tengely irányába terjedő harmonikus *síkhullám*

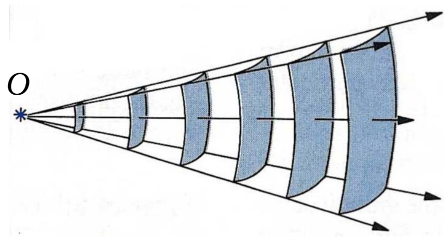
$$\boxed{\Psi(x,y,z,t) = A \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c} \right) + \alpha \right]}$$



Az origóból kiinduló harmonikus *gömbhullám*

$$\boxed{\Psi(x,y,z,t) = \frac{A_0}{r} \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(t - \frac{r}{c} \right) + \alpha \right]}$$

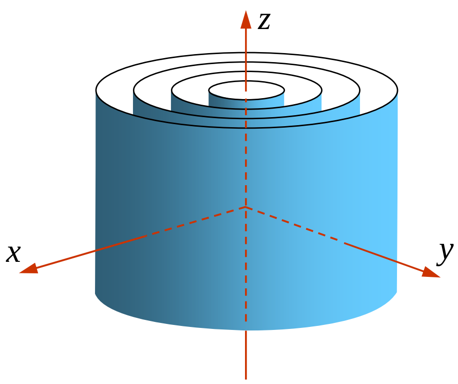
ahol $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



A z tengelyből kiinduló harmonikus *hengerhullám*

$$\boxed{\Psi(x,y,z,t) = \frac{A_0}{\sqrt{r}} \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(t - \frac{r}{c} \right) + \alpha \right]}$$

ahol $r = \sqrt{x^2 + y^2}$



Energiaviszonyok hullámterjedésnél. A hullám intenzitása

A hullámterjedés energiaviszonyait jellemző fizikai mennyiségek

- A közeg, amelyben a hullám terjed (szakaszonként) ***folytonosan*** tölti ki a teret.
- Így, a **fizikai mennyiségek** – a tömeghez vagy az elektromos töltéshez hasonlóan – a közeg teljes térfogatában oszlanak el, és az **eloszlásukat** az adott **fizikai mennyiség sűrűsségével** jellemezzük.

  Például a tömeg esetén, ha közeg kicsiny ΔV térfogatú térrészében Δm tömeg van, akkor a tömegsűrűség $\rho = \Delta m/\Delta V$. (Pontbeli értékét a $\Delta V \to 0$ határátmenettel kapjuk meg.)

  Szingularitás hiányában **véges, nem nulla** tömeggel csak egy **nem zérus** térfogatú térrész rendelkezik. Egy nulla térfogatú térrészben a tömeg értéke nulla.

  Az energia (és más mennyiségek is) a közeg teljes térfogatában **oszlik el**. Véges, nem zérus energiával csak a közegnek egy nem zérus térfogatú (és tömegű) része rendelkezik.

- **Energiasűrűség:** w

  A közeg (kicsi) ΔV térfogatú részében lévő ΔW energia és a ΔV hányadosa:
  $w = \Delta W/\Delta V$.

- **Energiaáramlás erőssége** (vagy **sugárzási teljesítmény**): P

  Az energiaáramlás irányára merőleges kicsiny Δq felületen kicsiny Δt idő alatt átáramló ΔW energia és a Δt hányadosa:
  $P = \Delta W/\Delta t$.

- **Energiaáramlás sűrűsége** (vagy **teljesítménysűrűség**) **:** I

  Az energiaáramlás irányára merőleges kicsiny Δq felületre vonatkozó ΔP energiaáramlás erősség és a Δq hányadosa:
  $I = \Delta P/\Delta q = \Delta W/(\Delta t\,\Delta q)$.

- **A hullám intenzitása:** I

  Az energiaáramlás (átlagos) sűrűsége. $\boxed{\Delta W = I\cdot\Delta q\cdot\Delta t}$

Energiasűrűség vékony rugalmas rúdban terjedő longitudinális hullám esetén

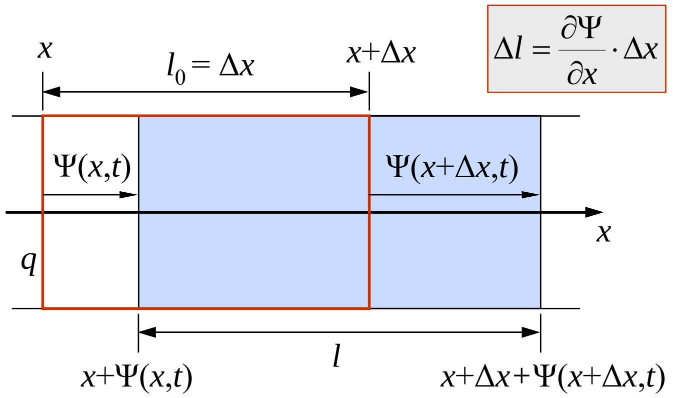
- **A mozgási energia sűrűsége**

  A közeg (kicsi) ΔV térfogatú (Δm tömegű) részének mozgási energiája $\Delta W_k = \frac{1}{2}\Delta m\cdot v^2$

$$\Delta W_k = \frac{1}{2}\rho\cdot\Delta V\cdot v^2 = \frac{1}{2}\rho\cdot\Delta V\cdot\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)^2 \rightarrow \boxed{w_k = \frac{\Delta W_k}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho\cdot\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)^2}$$

- **A helyzeti energia sűrűsége**

  Mennyi a közeg (kicsi) ΔV térfogatú részében felhalmozódó helyzeti energia?



$$\boxed{\Delta l = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\cdot\Delta x}$$

Miből származik a helyzeti energia?

- A megnyúlás és összenyomás következtében – a **rugalmasság** miatt – **helyzeti energia** halmozódik fel a közegben.
- A rugalmas erőket a Hooke-törvényből határozhatjuk meg:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\Delta l}{\Delta x} = \frac{1}{E}\,\frac{F}{q} \rightarrow$$

$$F = \frac{Eq}{\Delta x}\cdot\Delta l = D\cdot\Delta l\,,\quad \text{ahol}\quad D = \frac{Eq}{\Delta x} \rightarrow \Delta W_p = \frac{1}{2}D\cdot(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}\frac{Eq}{\Delta x}\cdot(\Delta l)^2 \rightarrow$$

$$\Delta W_p = \frac{1}{2}\frac{Eq}{\Delta x}\cdot\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\cdot\Delta x\right)^2 = \frac{1}{2}E\cdot\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2\Delta x\cdot q = \frac{1}{2}\rho c^2\cdot\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2\Delta V$$

$$\boxed{w_p = \frac{\Delta W_p}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho c^2\cdot\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2}$$

- **A teljes mechanikai energia sűrűsége** $\boxed{w = w_k + w_p}$

- **Háromdimenziós hullám energiasűrűsége**

$$\boxed{w_k = \frac{1}{2}\rho \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2} \qquad \boxed{w_p = \frac{1}{2}\rho c^2 \cdot \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right]} \qquad \boxed{w = w_k + w_p}$$

Haladó harmonikus síkhullám energiasűrűsége

$$\Psi = A \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= A\omega \cdot \cos\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha\right] \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= -A\frac{\omega}{c} \cdot \cos\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha\right] \end{aligned}$$

$$w_k = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \cdot \cos^2\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha\right] \qquad w_p = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \cdot \cos^2\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha\right]$$

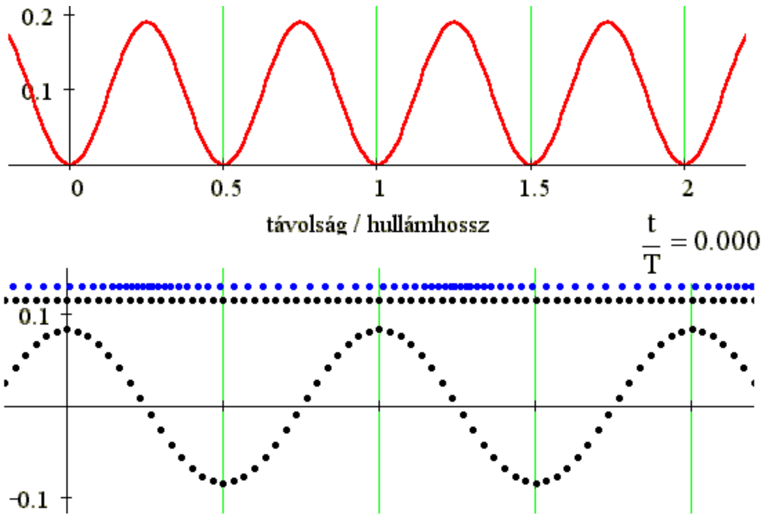
- Érdekes, hogy $w_k = w_p$, azaz a mozgási és helyzeti energia ugyanazzal a fázissal változik.
- Ez eltér a tömeg-rugó rendszernél tapasztalttól (ott $\pi/2$ fázis van közöttük)!

$$w = w_k + w_p = \rho A^2\omega^2 \cdot \cos^2\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha\right],$$

felhasználva a $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ összefüggést

- **Haladó harmonikus síkhullám energiasűrűsége**

$$\boxed{w = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 + \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \cdot \cos\left[2\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right) + 2\alpha\right]}$$



- energiasűrűség
- kitérés

- **Az animációból – és a képletből – jól látszik, hogy az energia is hullámszerűen terjed!**
- **Az energiasűrűség egy adott pontban egy állandó érték körül ingadozik.**
- **Az állandó értéke megegyezik az energiasűrűség egy periódusra vonatkozó átlagával:**

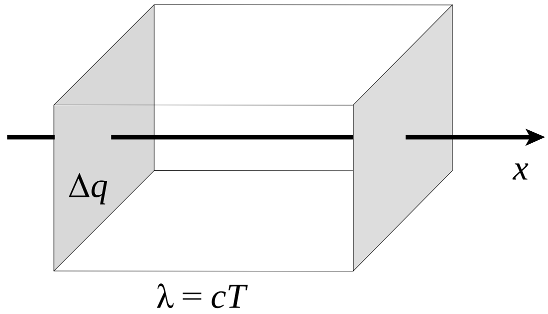
$$\boxed{\overline{w} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2}$$

- **Haladó harmonikus síkhullám intenzitása**

Láttuk, hogy a hullámban az energia c sebességgel áramlik a terjedés irányába.

Ha a terjedési irányra merőleges Δq nagyságú felületen ΔW energia áramlik át $\Delta t = T$ idő alatt, akkor az intenzitás $\Delta W/(\Delta t\, \Delta q)$.

T idő alatt (egy periódussal később) minden mennyiség **ugyanazt** az értéket veszi fel, és közben a hullám $\lambda = cT$ utat tesz meg.



Így Δq nagyságú felületen annyi energia áramlott keresztül, mint amennyi a $\Delta V = \Delta q\ \lambda$ térfogatban volt:

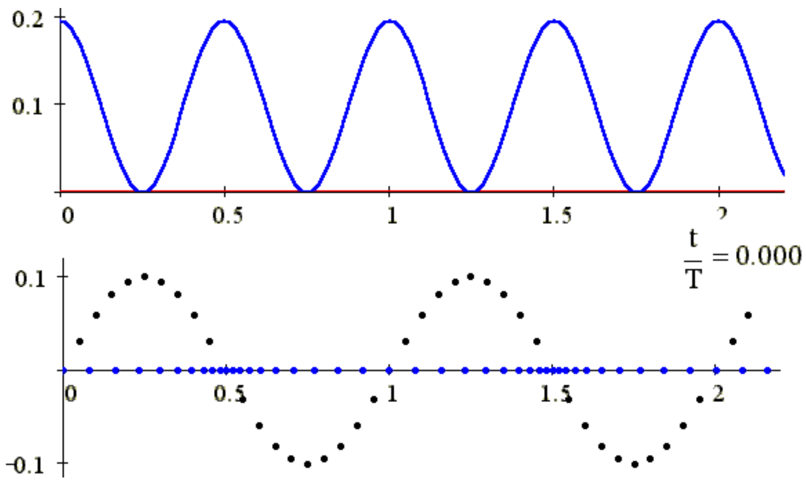
$$\left.\begin{aligned} \Delta W &= \overline{w}\cdot\Delta V = \overline{w}\cdot\Delta q\, cT \\ I &= \frac{\Delta W}{\Delta q\cdot\Delta t} = \frac{\Delta W}{\Delta q\cdot T} \end{aligned}\right] \Rightarrow \quad I = \overline{w}\cdot c, \quad \overline{w} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 c = \frac{1}{2}\rho v_{\max}^2 c}$$

A hullám intenzitása az amplitúdó négyzetével arányos, azaz $\boxed{I \propto A^2}$

- Ez más hullámokra is érvényes fontos összefüggés!
- Hasonlóan általánosan érvényes, hogy a hullám intenzitása az energiasűrűség egy periódusra vonatkozó átlagos értékének és a terjedési sebesség szorzata: $\boxed{I = \overline{w}\cdot c}$

- **Álló harmonikus síkhullám energiasűrűsége**
  - Érdemes összehasonlítani a haladó és az állóhullám energiasűrűségét!
  - Az állóhullámot leíró formulából kiszámítható az energiasűrűség (gyakorló feladat).

$$\Psi = 2A\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right), \qquad w = \frac{1}{2}\rho\cdot\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2\right]$$



- helyzeti energia sűrűsége
- mozgási energia sűrűsége
- teljes energia sűrűsége

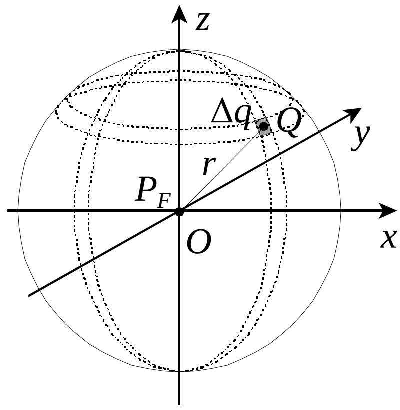
- kitérés

- Látható, hogy az állóhullám energiaviszonyai sokkal inkább hasonlít a rugó-tömeg rendszerre, mint a haladó hullámé!
- Itt a mozgási és helyzeti energia között – a csomópontokat és duzzadóhelyeket kivéve – $\pi/2$ fáziskülönbség van.

A gömbhullám amplitúdójának csökkenése

$$\Psi(r,t) = \frac{A_0}{r} \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(t - \frac{r}{c}\right) + \alpha\right] \quad \Rightarrow \quad A = A(r) = \frac{A_0}{r}$$

- Azaz a gömbhullám amplitúdója a forrástól mért távolsággal fordított arányban csökken!
- Mivel magyarázható ez a csökkenés?
- Kapcsolatos-e energiaelnyeléssel?



Ha hullámforrás teljesítménye P_F, akkor a forrásból Δt idő alatt $\Delta W = P_F\,\Delta t$ energia lép be a közegbe, és terjed tova c sebességgel a hullámban.

Ha a közegben **nincs** energiaelnyelés, akkor a forrástól r távolságra, az r sugarú gömbfelszínén Δt idő alatt szintén $\Delta W = P_F\,\Delta t$ energia áramlik át.

Az energiaáramlás erőssége a gömb felszínén megegyezik a forrás teljesítményével, hiszen $P = \Delta W/\Delta t = P_F$.

A hullám intenzitása, a gömbszimmetria miatt a gömb felszínén állandó, azaz $I = I(r)$, és mivel a gömb felszíne $4\pi r^2$, így

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{P_F}{4\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} I \propto \dfrac{1}{r^2} \\ I \propto A^2 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad A \propto \frac{1}{r}$$

- A hengerhullám amplitúdójának csökkenése hasonlóan látható be.

A hullámok elnyelődése

- Láttuk, hogy a terjedés során – energiaelnyelés hiányában – az intenzitás
  síkhullám esetén állandó,
  hengerhullám esetén $1/r$-rel arányosan, míg
  gömbhullámra $1/r^2$-tel arányosan csökken.
- Ha a közegben a rezgési energia elnyelődik, például rugalmas hullám esetén a belső súrlódás miatt hővé alakul, akkor a hullám intenzitása gyorsabban csökken a távolság függvényében.
- Az x tengely irányába terjedő harmonikus síkhullám esetén az intenzitás csökkenése – a tapasztalat szerint – általában **exponenciális**, azaz

$$\boxed{I(x) = I_0 \cdot e^{-\mu x}}$$

ahol I_0 az intenzitás az $x = 0$ helyen, és μ a közeg elnyelési (abszorpciós) tényezője.

<u>Magyarázat</u>:
Ha a közeg x és $x+\Delta x$ közé eső kicsi részében elnyelt energia, és így a ΔI intenzitás csökkenése arányos az I intenzitással és a közeg Δx vastagságával, akkor

$$\Delta I = -\mu \cdot I\,\Delta x \quad \xrightarrow{\Delta x \to 0} \quad \frac{dI}{dx} = -\mu \cdot I \quad \Rightarrow \quad I(x) = I_0 \cdot e^{-\mu x}$$

Az $1/\mu$ az a távolság, amely alatt a hullám intenzitása e-ad részére csökken. Mivel $1/\mu$ arra jellemző, hogy a hullám milyen mélyen hatol a közegbe, behatolási mélységnek nevezik.

A hullámban rezgő mennyiség tér- és időbeli függését leíró formula:

$$\Psi(x,y,z,t) = A \cdot e^{-(\mu/2)\cdot x} \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha\right]$$