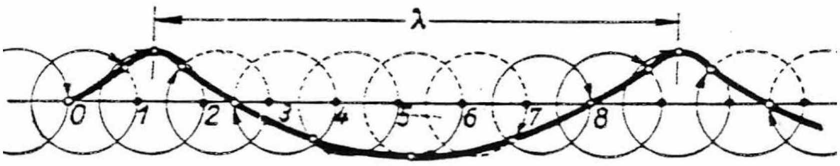
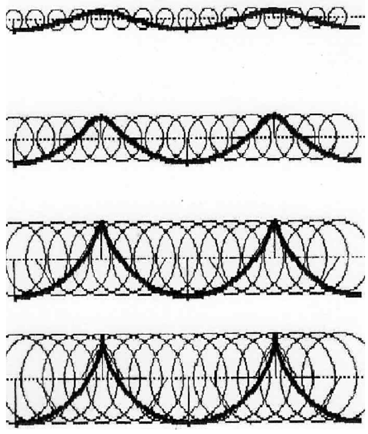
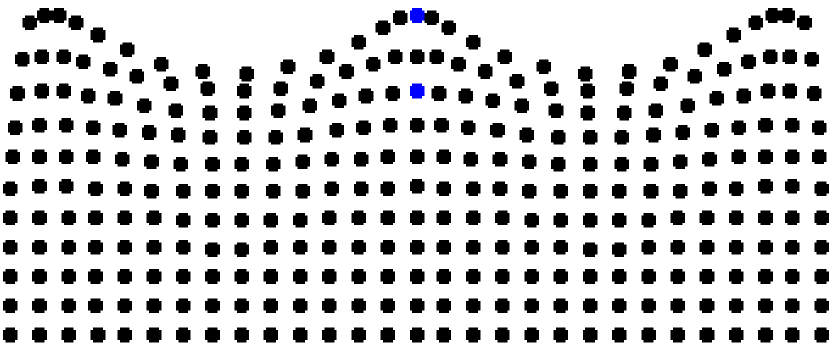
Vízhullámok (felületi hullámok). Diszperzió és hatása a hullámok terjedésére

- Nem nagy viszkozitású folyadék szabad felszínén felületi hullámok alakulnak ki.
- A hullámjelenség kialakulásában két erő játszik szerepet:
  a nehézségi erő, és
  felületi feszültségből származó erő.
- Hogyan mozognak a folyadék részecskéi?





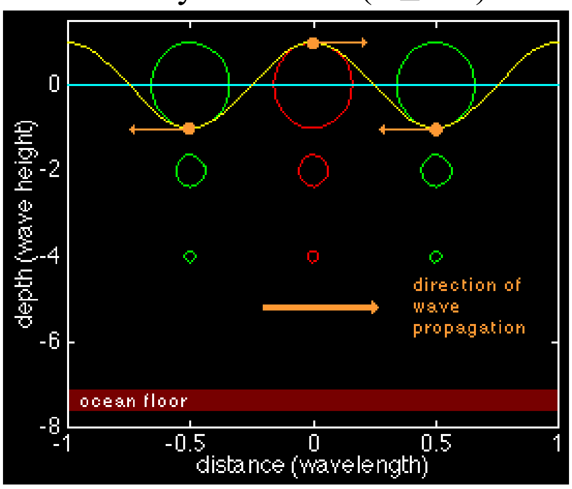


Animation courtesy of Dr. Dan Russell, Kettering University

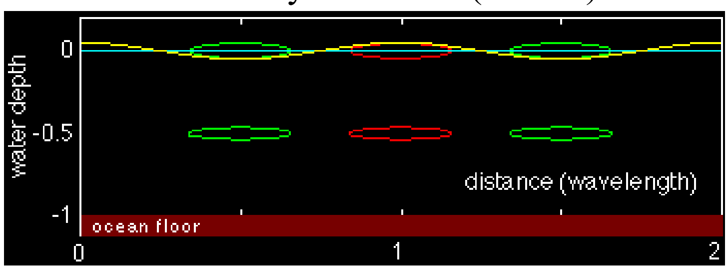
- A fenti ábrából látható, hogy a vízhullámok csak kis amplitúdókra szinuszos hullámok.
- Nagy amplitúdók esetén a hullámhegyek meredekek, a hullámvölgyek laposak.

A részecskék mozgása

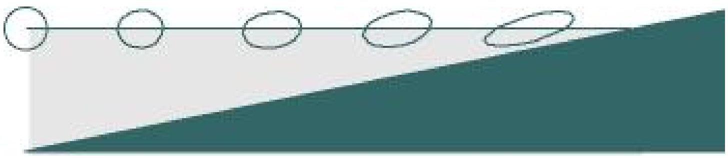
mély víz esetén ($h \geq \lambda/2$)



sekély víz esetén ($h < \lambda/2$)



átmenet a két eset között



Felületi hullámok terjedési sebessége

Hidrodinamikai meggondolások szerint elegendően mély ($h \geq \lambda/2$) folyadékra

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\alpha}{\lambda\rho}}} = \sqrt{\frac{g}{k} + k\frac{\alpha}{\rho}}, \qquad \text{ahol}$$

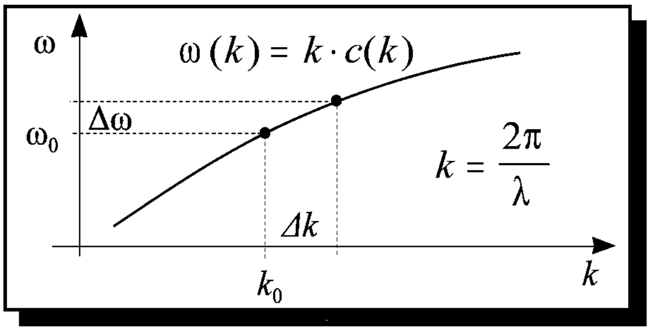
g a nehézségi gyorsulás, α a felületi feszültség, ρ sűrűség,
λ a hullámhossz és $k = 2\pi/\lambda$ a körhullámszám.

Diszperzió (szétszóródás [a spektrális összetevőké])
az jelenség, amikor fázissebesség függ a hullámhossztól, azaz $c = c(\lambda)$.

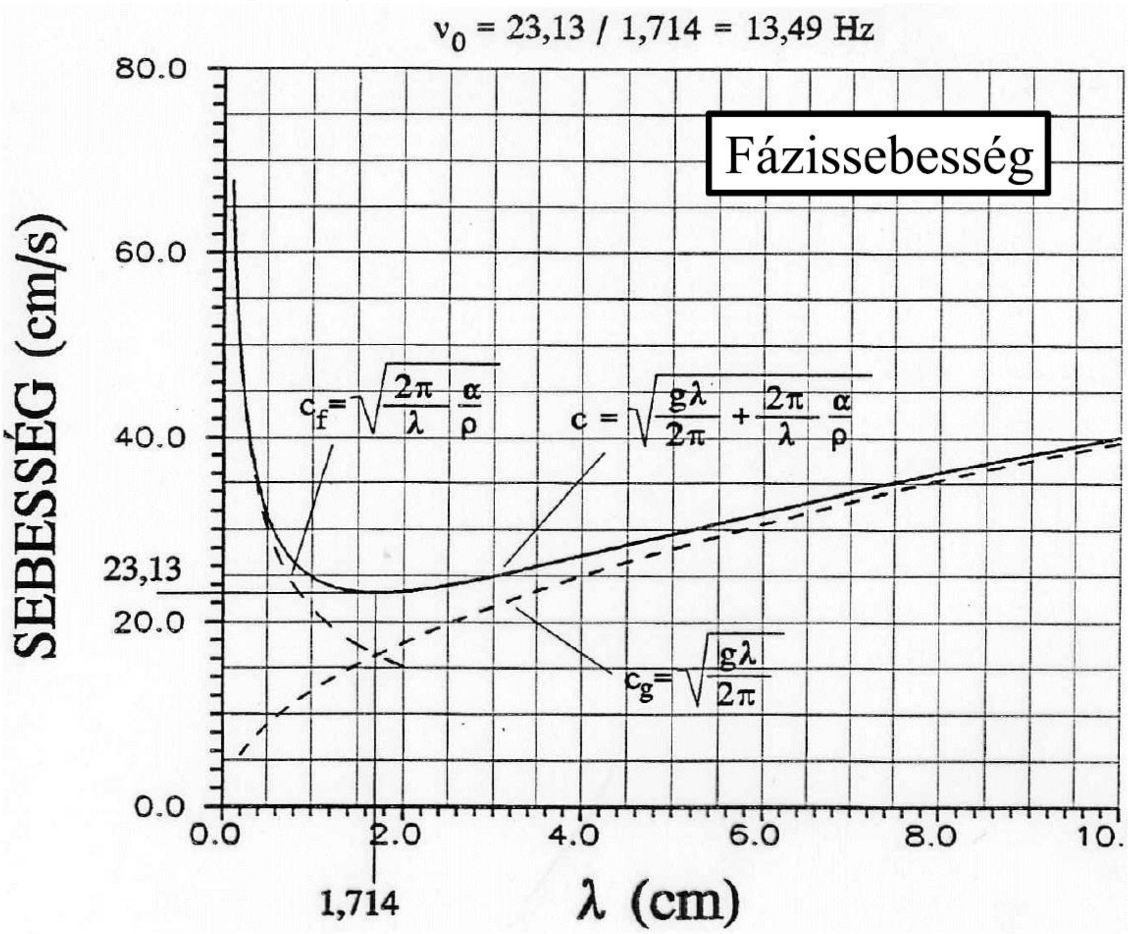
- A hullámhossz helyett használhatjuk a k (kör)hullámszámot is.
- A diszperzió esetén tehát $c = c(k)$.

$$c = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow \quad \omega(k) = k \cdot c(k)$$

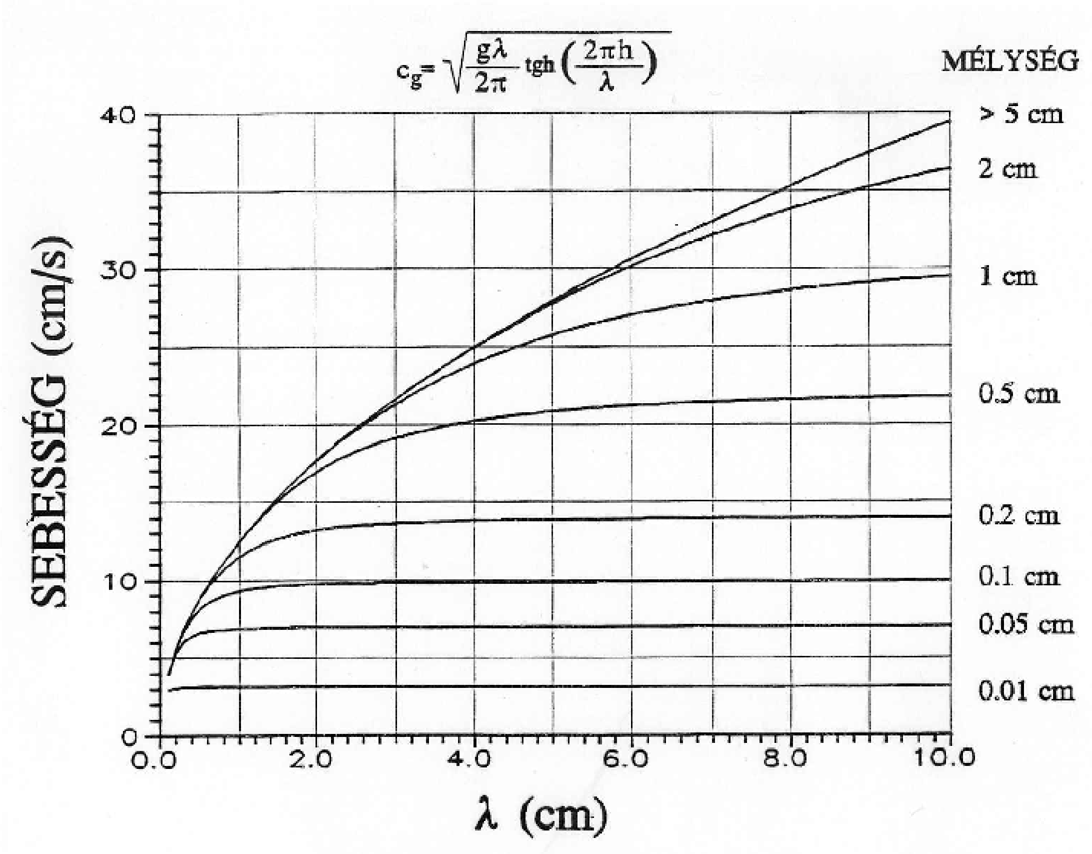
- Az $\omega = \omega(k)$ függvényt diszperziós relációnak nevezik.
- Diszperzió hiányában a diszperziós reláció grafikonja egy egyenes!



• **vízhullámok diszperziója**



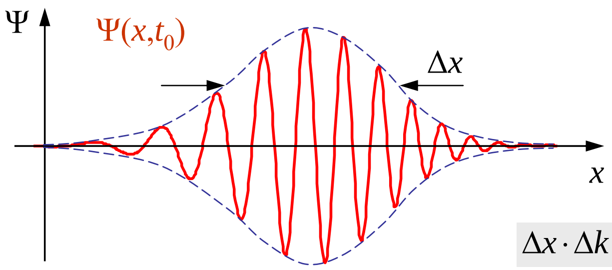
- **vízhullámok fázissebessége sekély vízben**



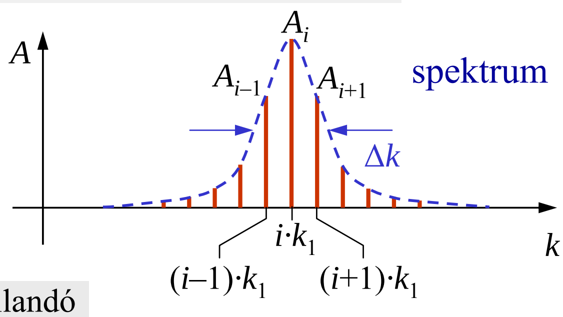
A diszperzió hatása a hullámok terjedésére

- A Fourier-féle felbontás hullámok esetén is használható, azaz
  nem-harmonikus hullámok harmonikus hullámok **összegére** bonthatók fel.

  Az x pontsoron terjedő hullámra $\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin[\omega_n \cdot t - k_n \cdot x + \alpha_n]$



$\Delta x \cdot \Delta k \geq$ állandó



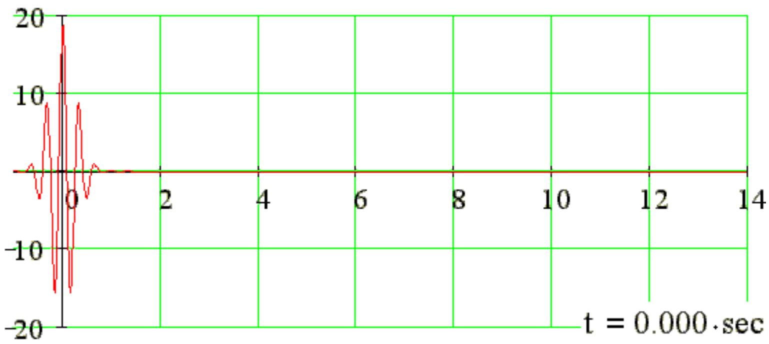
Az ilyen hullámvonulatot **hullámcsoportnak**, vagy **hullámcsomagnak** szokás nevezni.

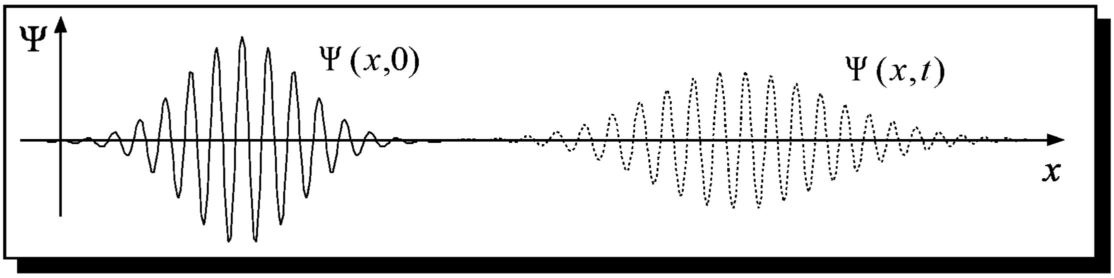
Diszperzió hiányában az összes összetevő azonos sebességgel terjed, így az egymáshoz viszonyított helyzetük nem változik.

Ezért diszperzió hiányában, nyílván az összetevők összege – vagyis a hullámcsoport – is ugyanezzel a közös sebességgel terjed. A hullám alakja a terjedés során nem változik.

Egészen más a helyzet diszperzió jelenlétekor!
Az összetevők egymáshoz képest elmozdulnak, így egy későbbi időpontban az összegük teljesen más alakú hullámot eredményezhetnek!

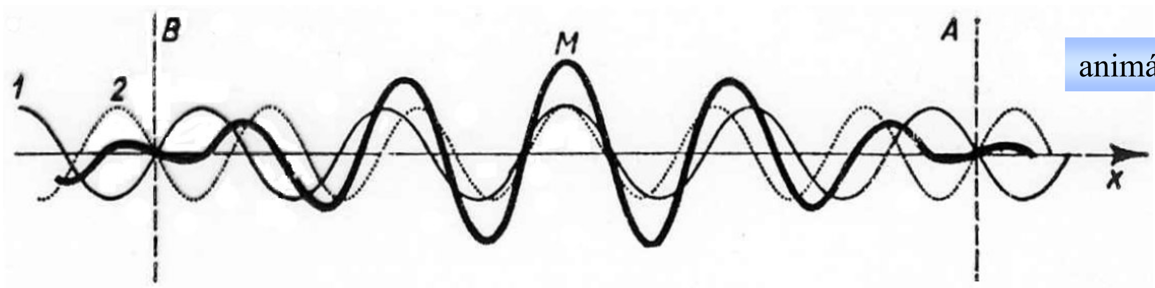
- A diszperzió hatására a hullámvonulat alakja és hossza is megváltozhat!
- Ez a változás általában kiszélesedés, ritkán ellentétes folyamat – rövidülés – is felléphet.
- Ennek a jelenségnek nagyon fontos szerepe van az ultrarövid fényimpulzusok előállításánál!





Mekkora sebességgel terjed az M maximum?

Az egyszerűség kedvéért vizsgáljunk csak két szinuszos hullámból álló hullámcsoportot!



animáció

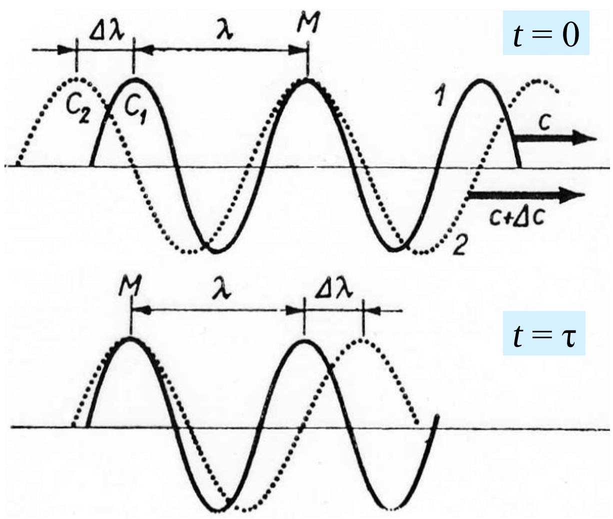
Mekkora sebességgel terjed az M maximum?

- A C_2 hullámhegy τ idő múlva éri utol a C_1 hullámhegyet.

$$\Delta\lambda = \Delta c\,\tau \quad \Rightarrow \quad \tau = \Delta\lambda / \Delta c$$

- Így τ idő múlva M a C_1 hullámhegy helyére kerül, vagyis az előtte lévőhöz képest λ távolsággal hátrább.
- Így M által τ idő alatt megtett út $s = c\tau - \lambda$.
- Az M maximum sebessége ezért

$$c^* = \frac{s}{\tau} = c - \frac{\lambda}{\tau} = c - \lambda\frac{\Delta c}{\Delta\lambda}$$



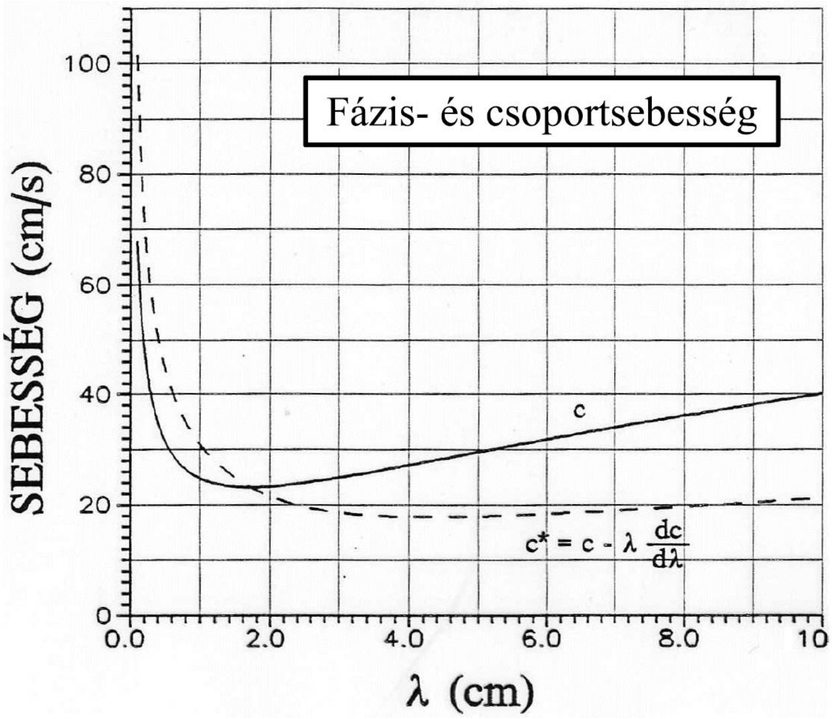
$\Delta\lambda \to 0$ esetén $c^* = c - \lambda\dfrac{dc}{d\lambda}$

- A hullámcsoport maximumának terjedési sebességét csoportsebességnek nevezik.

A csoportsebesség a Rayleigh-féle képletből számítható ki:

$$c^* = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} = \frac{d\omega}{dk}$$

- vízhullámok fázis- és csoportsebessége



- A képletből látható, hogy a csoportsebesség kisebb, és nagyobb is lehet mint a fázissebesség.

- Normális diszperzió: $\frac{dc}{d\lambda} > 0$

  ekkor $c^* < c$

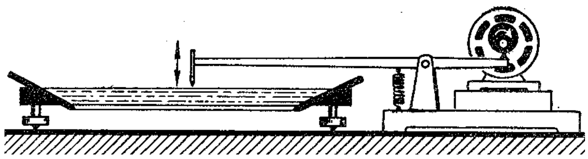
- Anomális diszperzió: $\frac{dc}{d\lambda} < 0$

  ekkor $c^* > c$

Hullámok visszaverődése, törése, interferenciája, elhajlása és szóródása

Hullámok terjedésénél fellépő jelenségek vízhullámokkal szemléltethetők!

A szemléltetésnél használt eszköz a hullámtál.

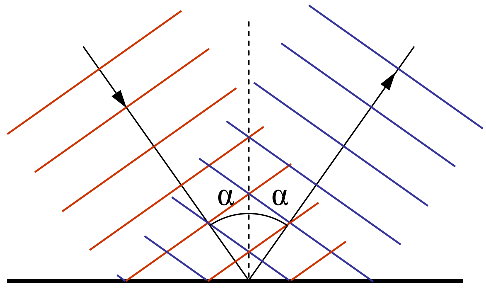


Visszaverődés

- Ha a hullám olyan határfelülethez érkezik, amelynek a mérete sokkal nagyobb, mint a hullámhossz, akkor a határfelületen visszaverődés lép fel.
- A kísérletekből levonható tapasztalat szerint a hullám terjedési iránya a következőképpen változik meg:

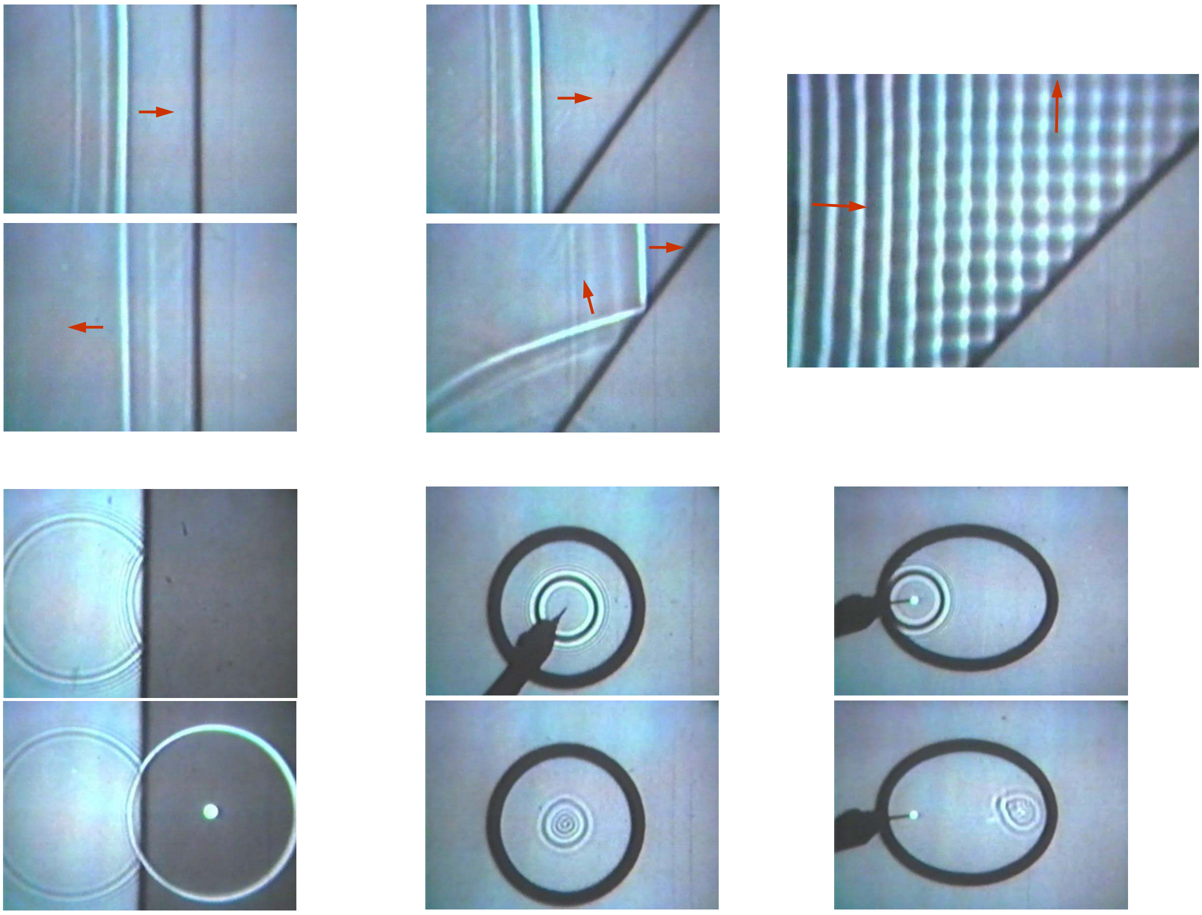
  a visszavert hullám terjedési iránya (visszavert sugár) a beesési síkba esik, és

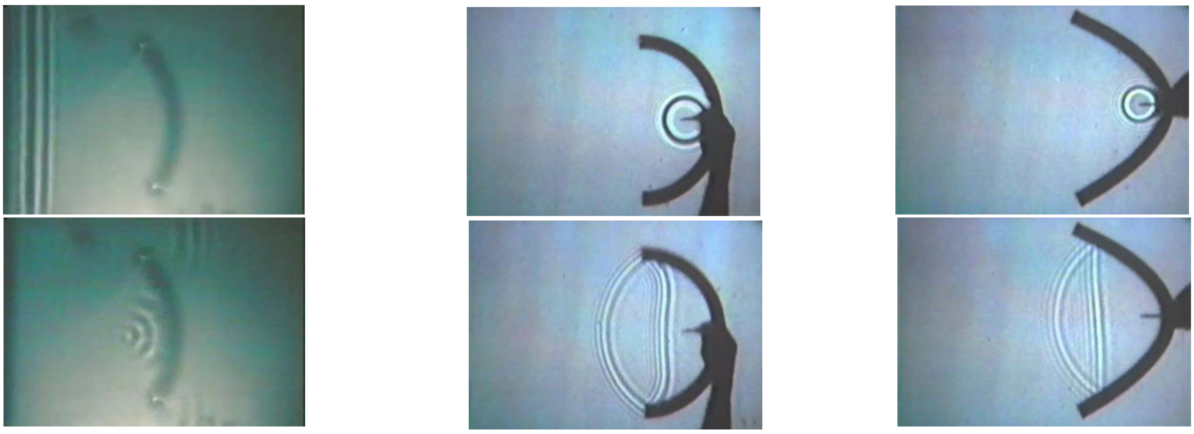
  a visszaverődési szög egyenlő a beesési szöggel.



- Ezek a törvényszerűségek érvényesek görbült visszaverő felületekre és görbült hullámfronttal rendelkező hullámokra is. Ugyanis a beesési merőleges kis környezetében mind a visszaverő felület, mind a hullámfelület az érintősíkjával közelíthető.

Hullámok visszaverődésének szemléltetése hullámtálban keltett vízhullámokkal



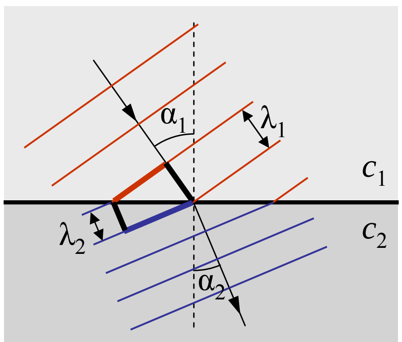


Törés

- Ha a hullám olyan határfelülethez érkezik, ahol a terjedési sebessége ugrásszerűen megváltozik, akkor a hullám hullámhossza és – a merőleges beeséstől eltekintve, – a terjedési iránya is megváltozik. Emellett a határfelületen visszaverődés is fellép!

  a megtört hullám terjedési irányát megadó egyenes (megtört sugár) a beesési síkba esik, és

  a beesési és a törési szögekre érvényes a Snellius-Descartes-féle törvény:

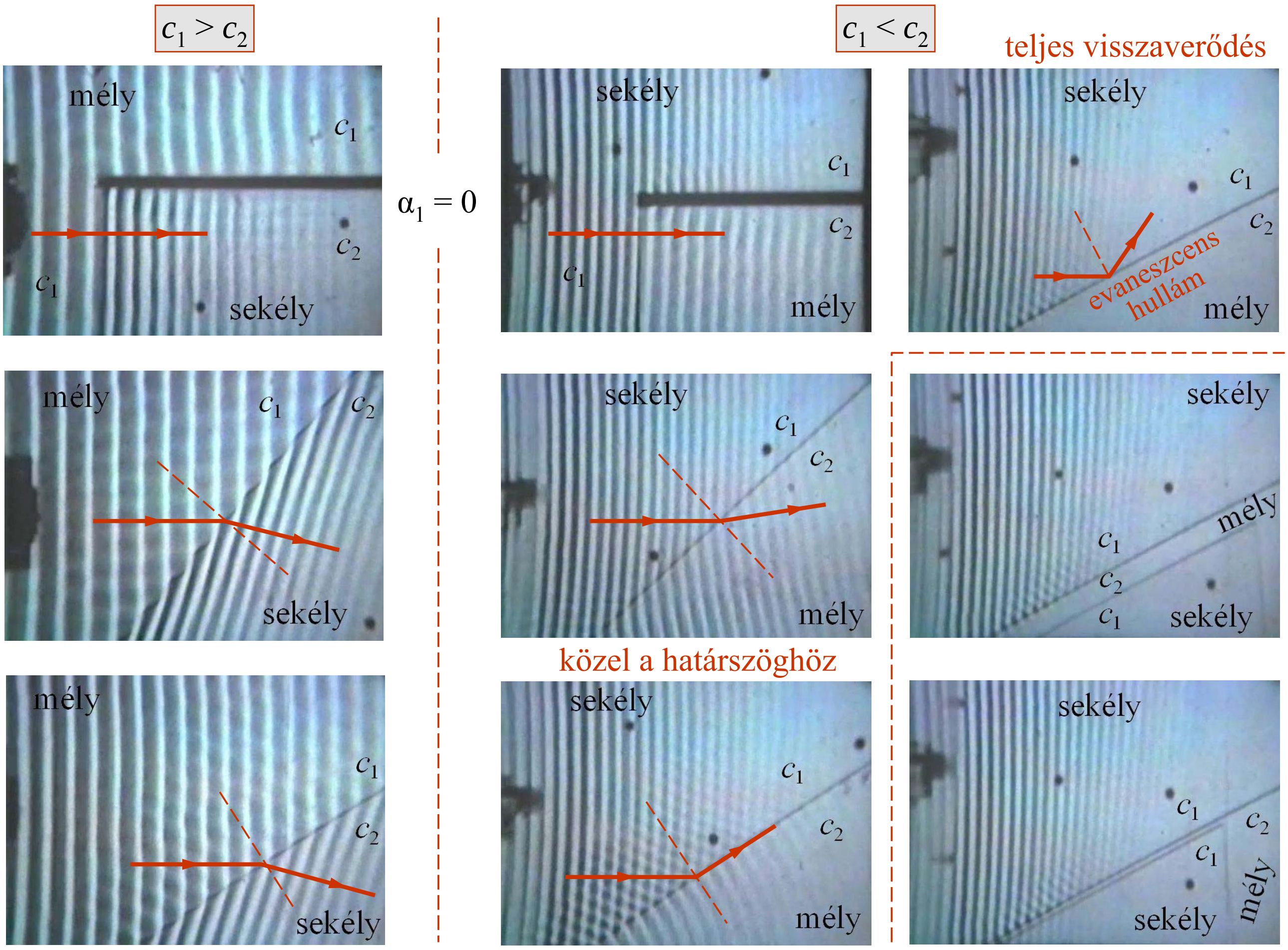


$$\frac{\sin\alpha_1}{\lambda_1} = \frac{\sin\alpha_2}{\lambda_2}$$

$$\frac{\sin\alpha_1}{c_1 T} = \frac{\sin\alpha_2}{c_2 T}$$

$$\boxed{\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}} = n_{21}$$

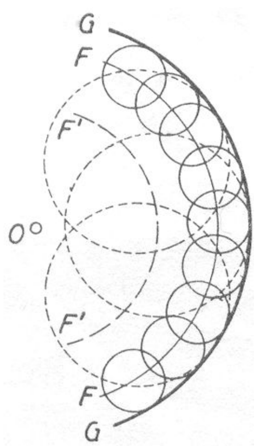
Hullámok törésének szemléltetése hullámtálban keltett vízhullámokkal

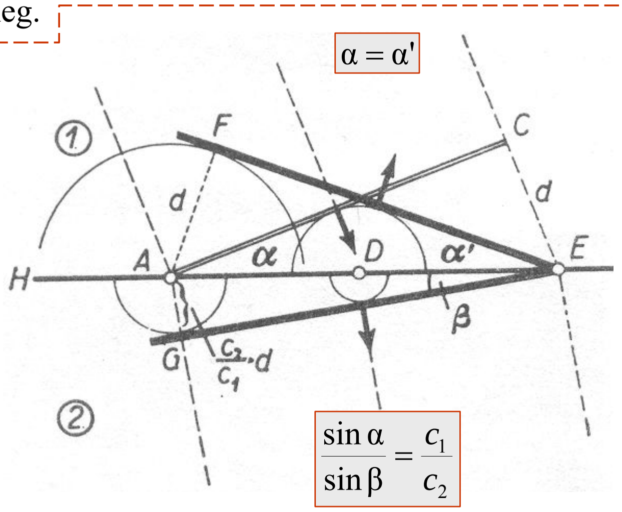


A visszaverődése és a törése elméleti értelmezése

- **Huygens-féle elv**

A hullám terjedése során a hullámfelület minden pontja elemi gömbhullámok forrásának tekinthető, a hullámfelületet egy későbbi időpontban ezen elemi hullámok burkoló felülete adja meg.





$$\alpha = \alpha'$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\overline{AF} = \overline{CE} = d$$

$$\tau = d/c_1$$

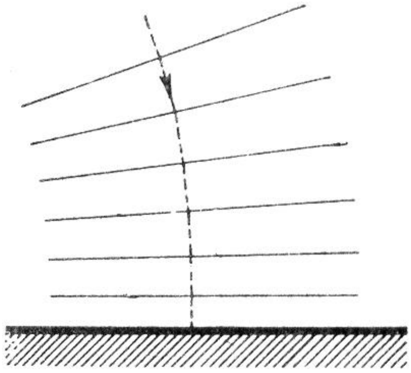
$$\overline{AG} = c_2\tau = \frac{c_2}{c_1}d$$

$$\overline{AE} = \frac{\overline{CE}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{AG}}{\sin\beta}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AG}} = \frac{d}{d\,c_2/c_1}$$

Hullámok terjedésének jellemzése geometriai sugarakkal

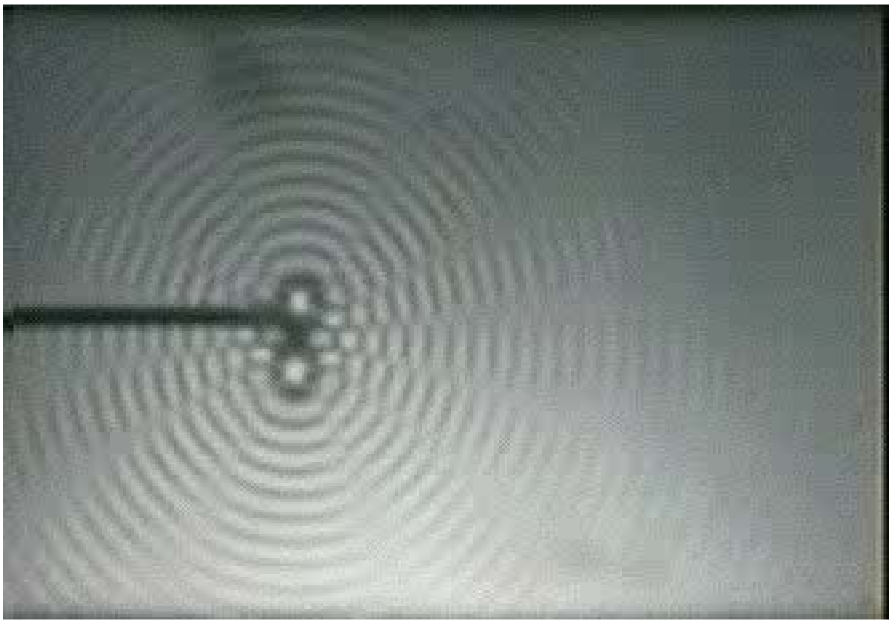
- A Huygens-féle elvből következik, hogy homogén és izotróp közegben a hullámok egyenes vonalban terjednek.
- Ilyen közegekben a terjedés a hullámfrontokra merőleges egyenesekkel, az u.n. geometriai sugarakkal jellemezhető (fény esetén ezek a fénysugarak).
- Szakaszonként homogén és izotróp közegben a geometria sugarak nyílván egyenes darabokból álló görbék.
- Inhomogén és izotróp közegben – a folytonos törés miatt – a terjedés már nem egyenes vonalú. A geometriai sugarak ekkor a hullámfelületre merőleges görbék.
- A hullám terjedését szemléltető sugarak azok a görbék, amely mentén a hullám energiája terjed.



- Később látni fogjuk, hogy az egyenes vonalú terjedés homogén és izotróp közegben is csak közelítőleg valósul meg.
- Azonban, jelentős eltérés csak akkor jelentkezik, ha a hullámok útjába a hullámhosszával kicsit nagyobb, azonos vagy kisebb méretű akadály kerül.
- Az egyenes vonalú terjedéstől való eltérés a hullámok elhajlásánál és szórásánál mutatkozik meg.

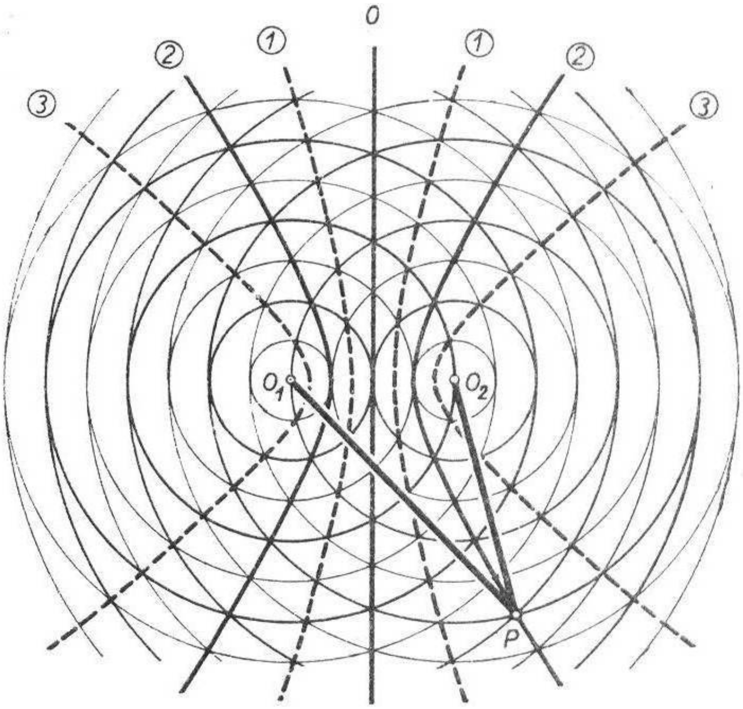
Interferencia

- Hullámok találkozásánál fellépő jelenség, amely szuperpozíció elvével értelmezhető.
- A Elméleti szempontból nagyon fontos jelenség, mert az interferencia megjelenése egyértelműen a jelenség hullámtermészetét bizonyítja!



- Bizonyos helyeken a hullámok erősítik, máshol viszont gyengítik egymás hatását.
- A szinuszos hullámok egy adott P pontban harmonikus rezgéseket hoznak létre.
- A jelenség értelmezéséhez a rezgések összeadásánál tanultakat kell alkalmazni!

- Erősítési helyeken hullámok azonos, gyengítési helyeken pedig ellentétes fázisban találkoznak.



- Tegyük fel, hogy a két forrás azonos fázisban rezeg. (szemléltetés)
- A szuperpozíció elve alapján:

$$\Psi(P,t) = \Psi_1(P,t) + \Psi_2(P,t) =$$

$$= A_1 \cdot \sin(\underbrace{\omega t - kr_1}_{\alpha_1}) + A_2 \cdot \sin(\underbrace{\omega t - kr_2}_{\alpha_2}) =$$

$$\Psi(P,t) = A \cdot \sin[\omega t + \alpha(P)]$$

$$|A_1 - A_2| = A_{min} \le A \le A_{max} = A_1 + A_2$$

$$A = \begin{cases} A_{max}, & \text{ha} \quad \delta = 2m \cdot \pi \\ A_{min}, & \text{ha} \quad \delta = (2m+1) \cdot \pi \end{cases}$$

ahol $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\delta = k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) \quad \Rightarrow \quad r_1 - r_2 = \begin{cases} 2m \cdot \lambda/2 = m \cdot \lambda & \text{maximális erősítés} \\ (2m+1) \cdot \lambda/2 & \text{maximális gyengítés} \end{cases}$$

- Ebből látható, hogy az erősítési és gyengítési helyek egyaránt hiperbolákon helyezkednek el!

- **Elhajlás (diffrakció)**

  Ha a hullám terjedését olyan tárgy akadályozza, melynek mérete kicsit nagyobb, vagy összemérhető a hullámhosszal, akkor az egyenes vonalú terjedéstől eltérések mutatkoznak!

  A hullám olyan tartományba is behatol, ahova az egyenes vonalú terjedést követve **nem** juthatna el. Ezért a jelenséget elhajlásnak nevezik.

Elhajlás résen

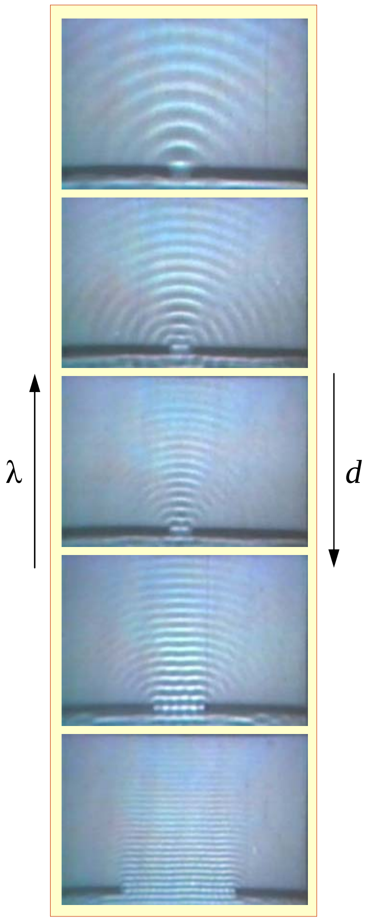
Elhajlás élen

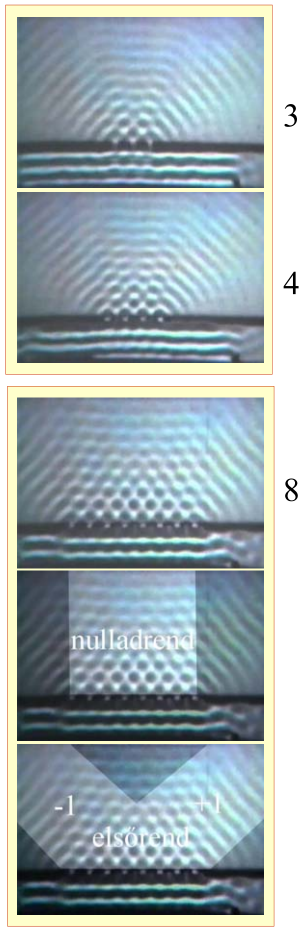
- **Az elhajlás és az interferencia között igen szoros kapcsolat áll fenn!** Ez különösen jól szemléltethető a híres *Young-féle* kétréses kísérlettel.

Elhajlás résen

Elhajlás kettősrésen

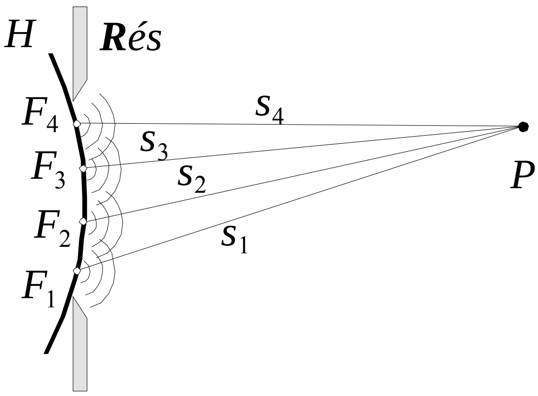
Elhajlás több résen



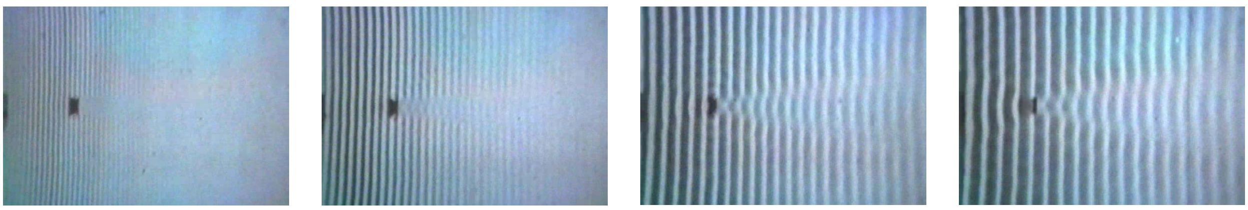


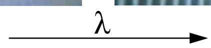
- **Huygens-Fresnel-féle elv**

  A hullám terjedése során a hullámfelület minden pontja elemi gömbhullámok forrásának tekinthető. Egy későbbi időpontban megfigyelhető hatást ezen elemi hullámok interferenciája határozza meg.



- Az elemi hullámok közötti útkülönbségtől függően, egy adott *P* pontban az elemi hullámok erősíthetik, vagy gyengíthetik egymást.
- Az útkülönbség a *d* résszélesség és a λ hullámhossz viszonyától függ. Vagyis a jelenséget a két mennyiség viszonya határozza meg!
- Ha $d \approx \lambda$, vagy $d \ll \lambda$, akkor gyakorlatilag a réstől minden irányban erősítés lép fel, mert az elemi hullámok közötti útkülönbség a λ-nál sokkal kisebb.
- Az elhajlás átlátszatlan **akadály** esetén is fellép.





- **Szórás**

Ha a hullám terjedését olyan tárgy akadályozza, melynek mérete sokkal kisebb mint a hullámhossz, akkor az egyenes vonalú terjedéstől szintén elérés mutatkozik!

Az ilyen esetben fellépő elhajlást szórásnak nevezik

Az akadály másodlagos hullámforrássá válik.

A másodlagos hullám a szórt hullám. A jelenséget a tovaterjedő és a szórt hullámok interferenciája határozza meg.