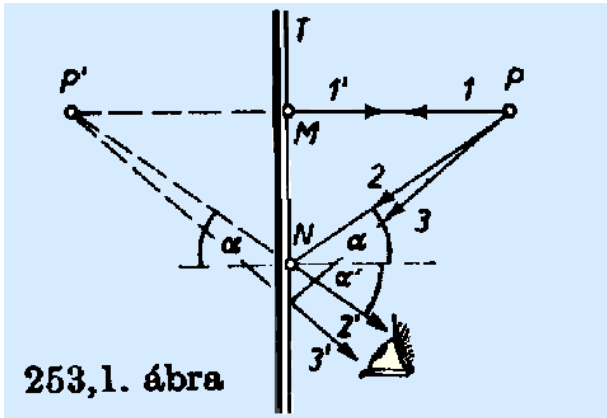


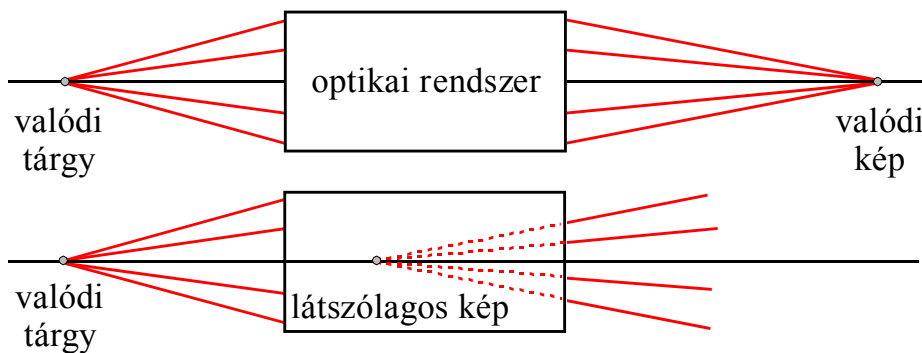
Optikai leképezés visszaverődés és törés útján

Síktükör képalkotása



Az optikai kép. Pontszerű tárgy képe

- P pontszerű tárgyból kiinduló tetszőleges fénysugár a visszaverődés után úgy hagyja el a tükröt, mintha a P' pontból indult volna ki.
- Ha egy adott P pontból kiinduló fénysugarak – visszaverődések és/vagy törések után – az optikai eszközt úgy hagyják el, hogy a **sugarak** vagy azok **meghosszabbításai** egy adott P' ponton mennek keresztül, akkor azt mondjuk, hogy **az optikai eszköz képet alkot**, és a P' pontot a P pont **képének** nevezzük.



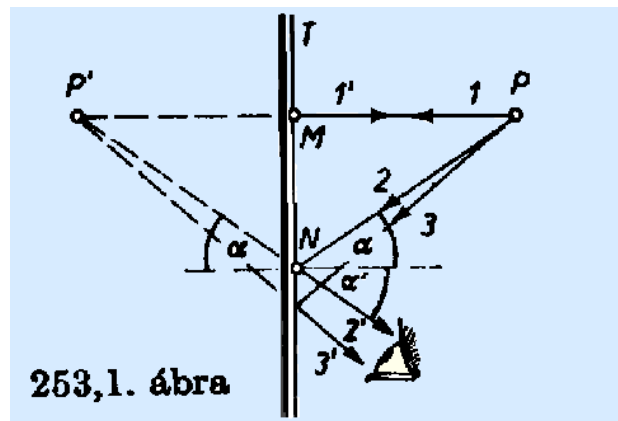
A kép típusai

- **valódi**
- **látszólagos (virtuális)**

- A síktükör valódi tárgyról virtuális képet állít elő.
- A képtávolság egyenlő tárgytávolsággal.

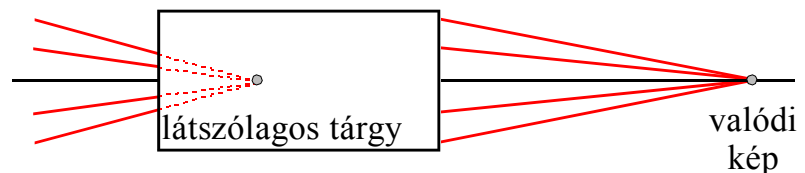
Virtuális tárgy

- Tekintsünk egy a tükrre eső, a P' ponton átmenő fénysugarakból álló összetartó (konvergens) fénynyalábot.
- A fénysugarak megfordíthatóságából rögtön következik, hogy a tükröt egy a P ponton átmenő összetartó fénynyaláb hagyja el.

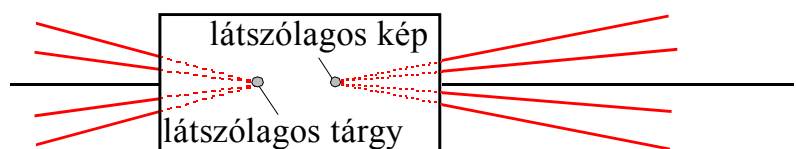


- Vagyis a P' pont felé tartó összes sugár az optikai eszköz után a P ponton megy keresztül, így joggal mondhatjuk, hogy a P pont a P' **látszólagos (virtuális) tárgy** képe.

- A síktükör virtuális tárgyról valódi képet alkot.



- Virtuális tárgyról persze egy optikai eszköz alkothat virtuális képet is!

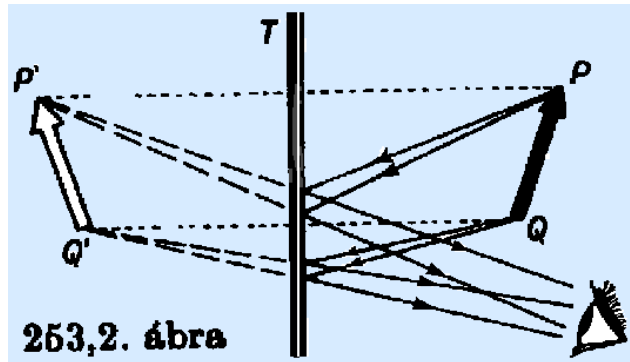


- A virtuális tárgy az egymás utáni képalkotások leírásánál nagyon hasznos segéd eszköz.

- A későbbi leképezési egyenleteknél **virtuális** tárgyra a tárgytávolság **negatív** ($t < 0$).

Kiterjedt tárgy képe

- A kiterjedt tárgy pontszerű tárgyak összességének tekinthetjük.
- Ezekre külön-külön alkalmazhatjuk az előzőekben megállapított szabályokat.

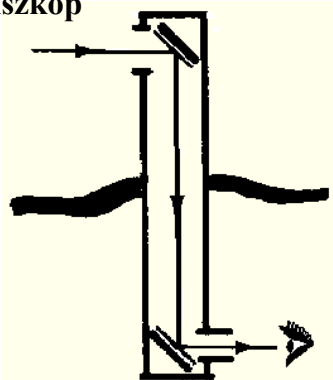


Ezek alapján a képképzés sajátosságai:

- A képtávolság egyenlő tárgytávolsággal.
- A kép egyenes állású és a tárggyal azonos nagyságú.
- Valódi tárgy képe virtuális, és virtuális tárgy képe valódi.
- A bal és jobb kéz egymás tükörképei.

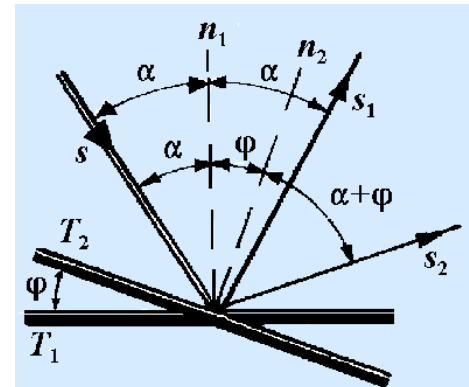
Síktükör alkalmazásai

- Periszkóp



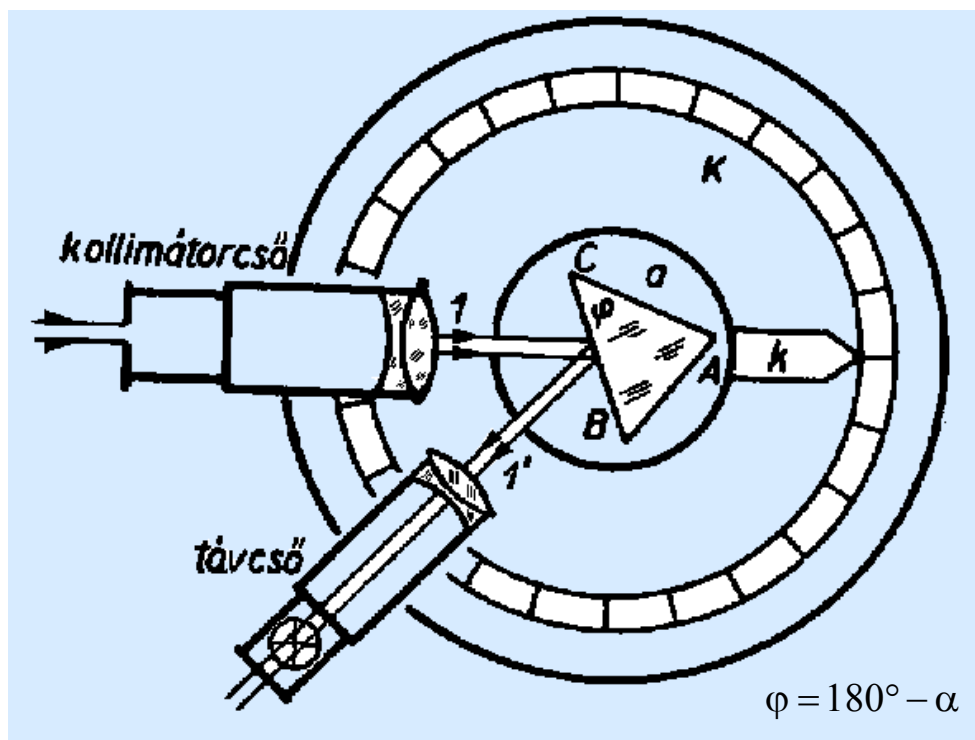
- Skála tükör
- Forgó tükör

$$s_1 \angle s_2 = ?$$



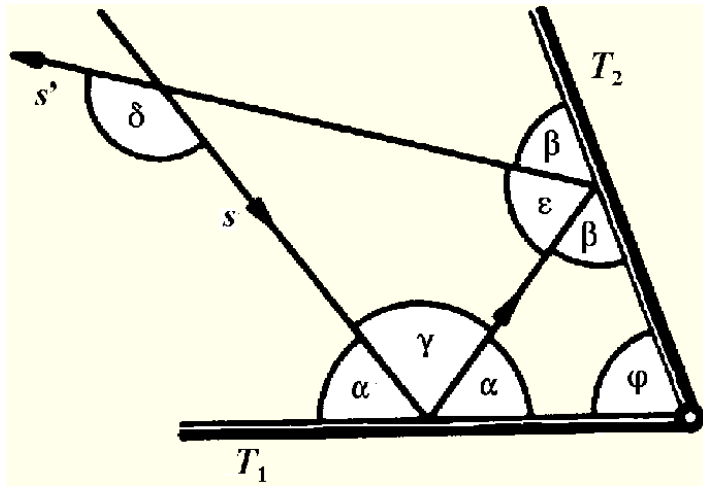
$$s_1 \angle s_2 = (\alpha + \varphi) + (\alpha + \varphi) - (\alpha + \alpha) = 2\varphi$$

- Reflexiós goniométer



- Ugyanez az eszköz használható a törésmutató mérésére a minimális deviáció szögének és a prizma törésszögének mérésével!
- Ugyancsak használható a színek tanulmányozására (prizmás spektroszkóp)!

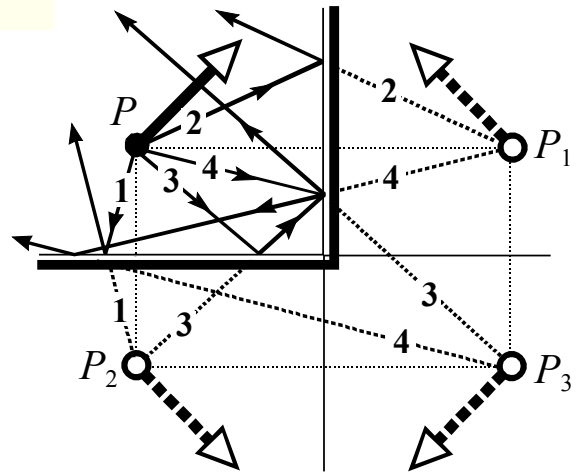
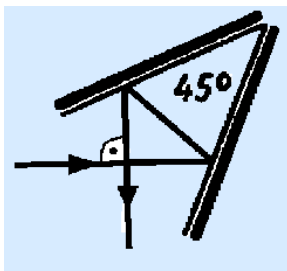
• Szögtükör



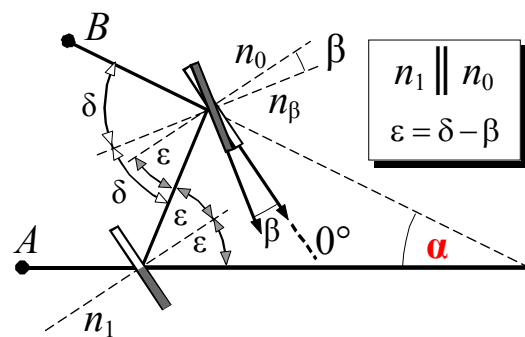
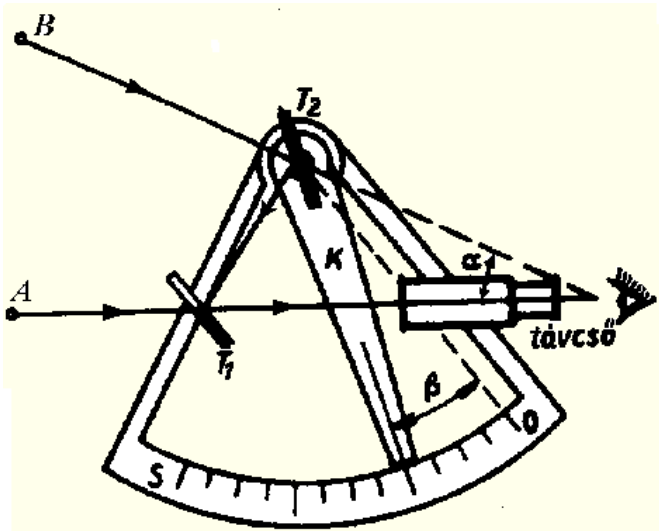
$$\begin{aligned} \gamma + \epsilon &= \delta \\ 2\alpha + \gamma &= 180^\circ \\ 2\beta + \epsilon &= 180^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\alpha + 2\beta + \delta &= 360^\circ \\ \alpha + \beta + \phi &= 180^\circ \\ 2\alpha + 2\beta + 2\phi &= 360^\circ \end{aligned}$$

$$\delta = 2\phi$$



• Szextáns



$$\begin{aligned} n_1 &\parallel n_0 \\ \epsilon &= \delta - \beta \end{aligned}$$

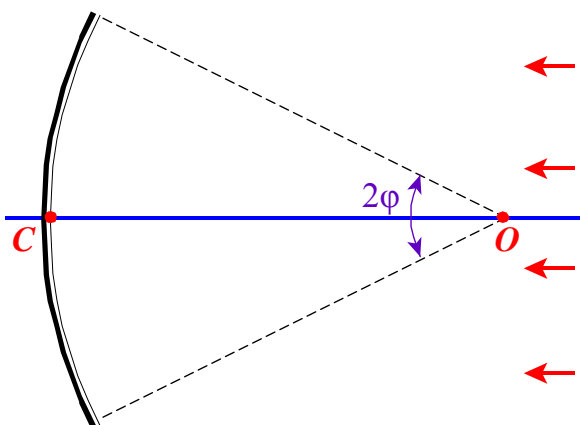
$$2\delta = \alpha + 2\epsilon$$

$$2\delta = \alpha + 2\delta - 2\beta$$

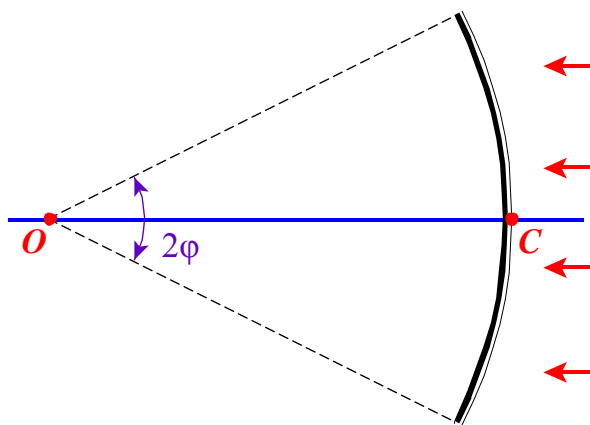
$$\alpha = 2\beta$$

Gömbtükrök képzalkotása

homorú tükör

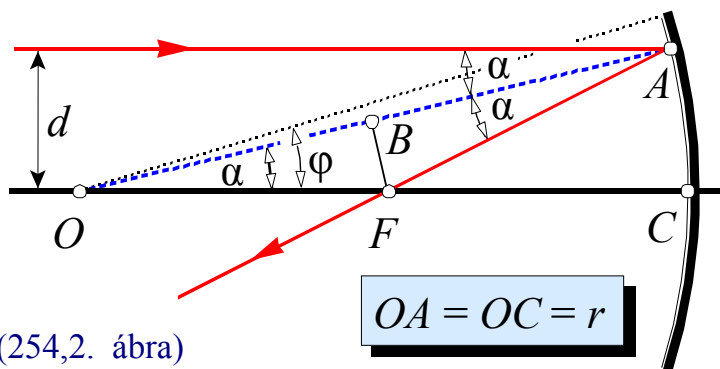


domború tükör



- O a tükröző gömbfelület görbületi középpontja
- φ a tükör nyílásszöge
- C tetőpont a tükör optikai középpontja
- OC egyenes az optikai tengely (vagy főtengely)

Homorú tükör fókusztávolsága



(254,2. ábra)

$$\left. \begin{aligned} \overline{OB} &= \frac{r}{2} \\ \cos \alpha &= \frac{\overline{OB}}{\overline{OF}} \end{aligned} \right\} \rightarrow \overline{OF} = \frac{r}{2 \cdot \cos \alpha}$$

$$\overline{CF} = r - \overline{OF} = \frac{r}{2} \cdot \left(2 - \frac{1}{\cos \alpha} \right)$$

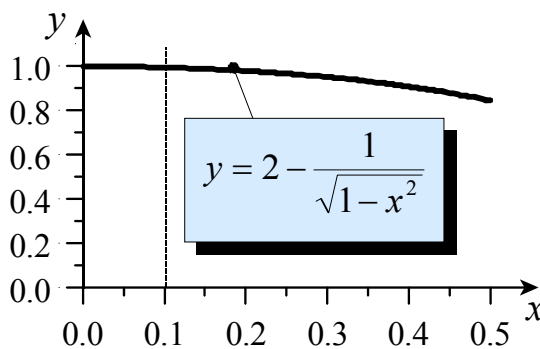
$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - (d/r)^2}$$

$$f = \overline{CF} = \frac{r}{2} \cdot \left(2 - \frac{1}{\sqrt{1 - (d/r)^2}} \right)$$

Kísérleti szemléltetés: Hartl-féle koronggal.

Paraxiális közelítés

- Az optikai tengelyhez közeli, a tengellyel kis szöget bezáró fénysugarakra, a paraxiális sugarakra korlátozzuk a vizsgálatot.



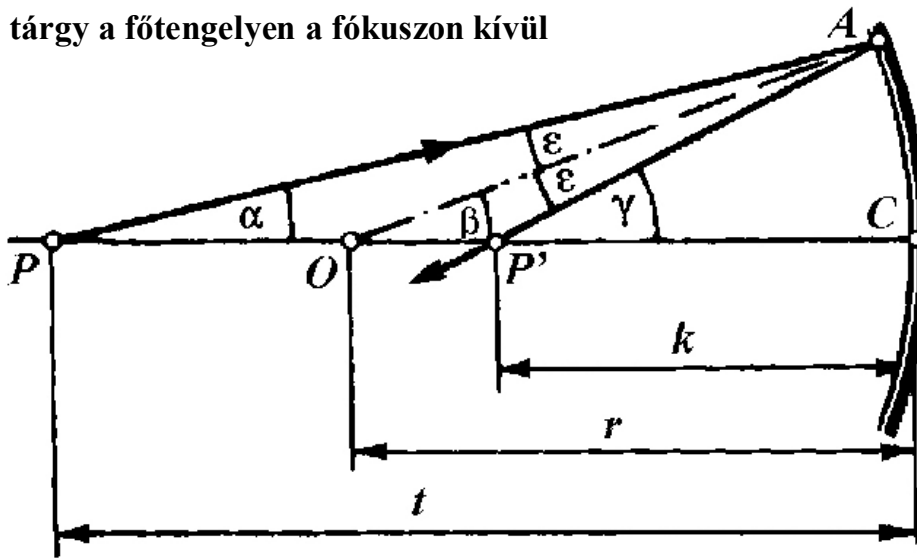
Paraxiális közelítésben

$$f = \frac{r}{2}$$

← paraxiális fókusztávolság

Leképezés paraxiális közelítésben

tárgy a főtengelyen a fókuszon kívül



$$\alpha = \frac{\overline{CA}}{t}$$

$$\beta = \frac{\overline{CA}}{r}$$

$$\gamma = \frac{\overline{CA}}{k}$$

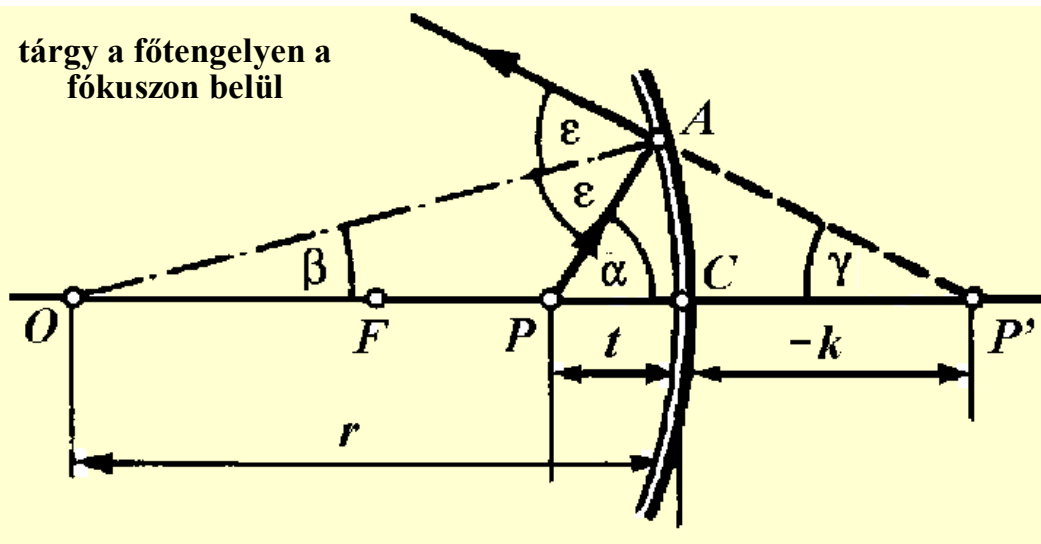
$$f = \frac{r}{2}$$

$$\begin{array}{l} OP'A \triangle: \quad \gamma = \beta + \varepsilon \\ POA \triangle: \quad \beta = \alpha + \varepsilon \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} OP'A \triangle: \\ POA \triangle: \end{array}} \right\} \rightarrow \alpha + \gamma = 2\beta \rightarrow \frac{\overline{CA}}{t} + \frac{\overline{CA}}{k} = 2 \frac{\overline{CA}}{r} \rightarrow$$

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

Leképezési egyenlet (tükör egyenlet)

tárgy a főtengelyen a fókuszon belül



$$\alpha = \frac{\overline{CA}}{t}$$

$$\beta = \frac{\overline{CA}}{r}$$

$$\gamma = \frac{\overline{CA}}{-k}$$

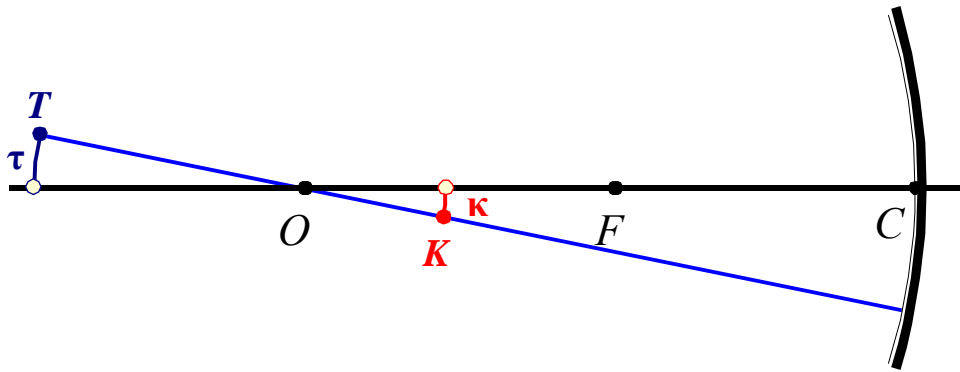
$$f = \frac{r}{2}$$

$$\begin{array}{l} OPA \triangle: \quad \alpha = \beta + \varepsilon \\ P'AP \triangle: \quad 2\varepsilon = \alpha + \gamma \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} OPA \triangle: \\ P'AP \triangle: \end{array}} \right\} \rightarrow \alpha - \gamma = 2\beta \rightarrow \frac{\overline{CA}}{t} - \frac{\overline{CA}}{-k} = 2 \frac{\overline{CA}}{r} \rightarrow$$

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

Leképezési egyenlet (tüköregyenlet)

Nem a főtengelyen lévő pont leképezés paraxiális közelítésben

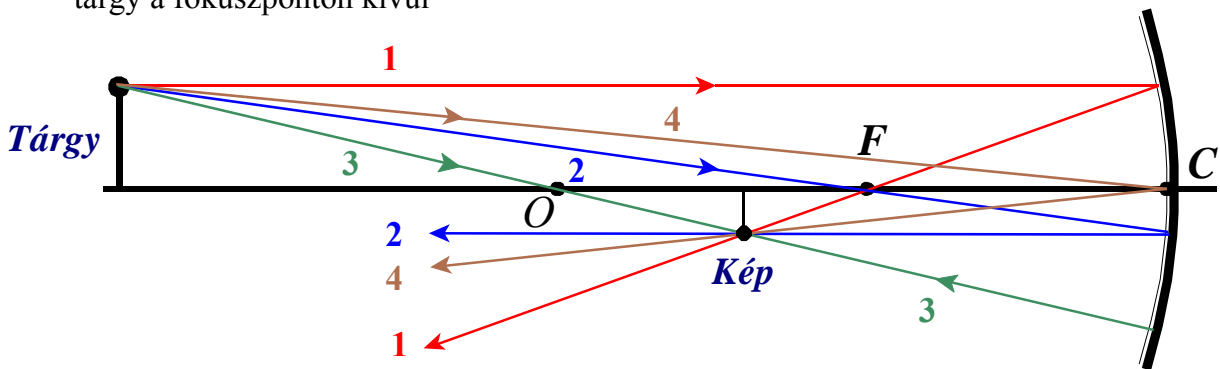


- T és az O ponton keresztül berajzoljuk a melléktengelyt.
- T képét megszerkeszthetjük az előbb látott módon.
- Hasonlóan kapjuk a kicsiny τ körív κ képét.
- Paraxiális közelítésben a kicsiny körív helyettesíthető az optikai tengelyre merőleges kicsiny szakasszal.
- Paraxiális közelítésben az optikai tengelyre merőleges kicsiny szakasz képe az optikai tengelyre merőleges kicsiny szakasz.
- A tárgy- és a képtávolságra érvényes a leképezés egyenlet:

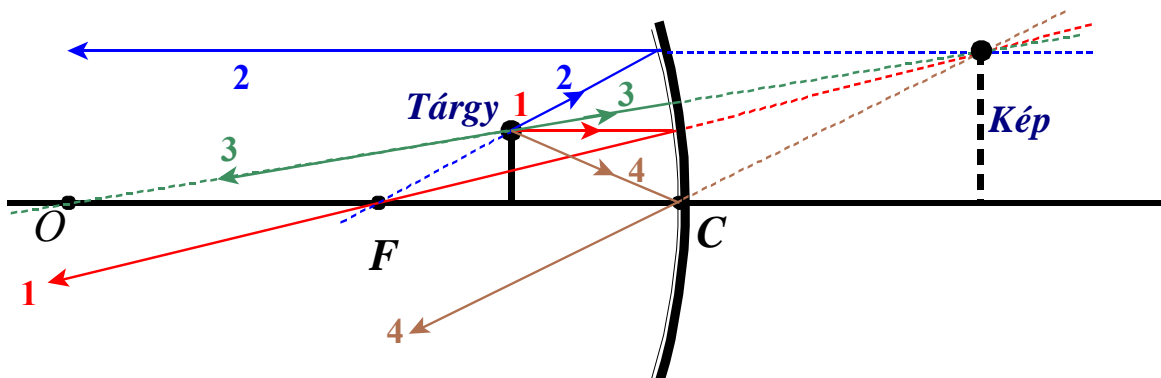
$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

Képszerkesztés nevezetes sugarakkal

tárgy a fókuszponton kívül



tárgy a fókuszponton belül



Nagyítás és a leképezési egyenlet Newton-féle alakja

Nagyítás: $N = y'/y$

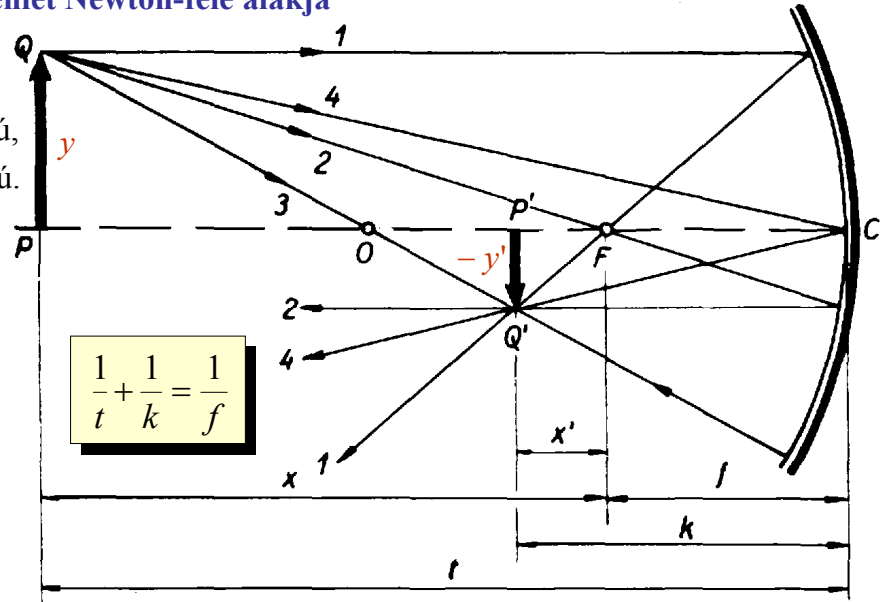
- $N > 0$, ha kép egyenes állású,
- $N < 0$, ha kép fordított állású.

$$|N| = \overline{P'Q'} / \overline{PQ}$$

CPQ és $CP'Q'$
háromszögek hasonlók

$$\frac{y}{t} = \frac{-y'}{k} \rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{k}{t}$$

$$N = -\frac{k}{t}$$



$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f} \rightarrow -N = \frac{k}{t} = \frac{k}{f} - 1 = \frac{k-f}{f} = \frac{x'}{f} \rightarrow N = -\frac{x'}{f}$$

$$-\frac{1}{N} = \frac{t}{k} = \frac{t}{f} - 1 = \frac{t-f}{f} = \frac{x}{f} \rightarrow N = -\frac{f}{x}$$

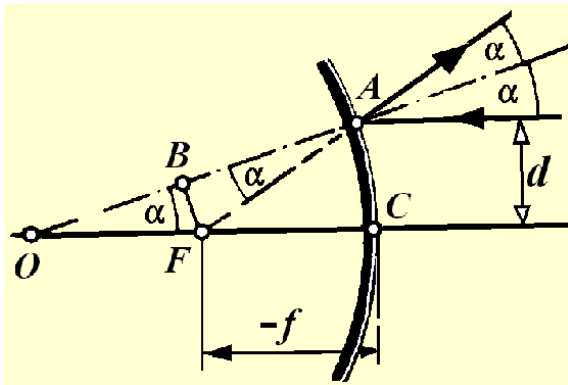
$$\frac{x'}{f} = \frac{f}{x} \rightarrow x \cdot x' = f^2$$

$$x \cdot x' = f^2$$

Newton-féle leképezési egyenlet

Fókuszon belüli, valamint virtuális tárgy esetén ugyanezek az összefüggések érvényesek.

Domború tükör fókuszpontja



$$f = -\overline{CF} = -\frac{r}{2} \cdot \left(2 - \frac{1}{\sqrt{1 - (d/r)^2}} \right)$$

Az optikai tengely közelében haladó ($d/r < 0.1$) párhuzamos sugarak jó közelítéssel egy pontban metszik egymást.

Az optikai tengellyel párhuzamosan beeső (paraxiális) sugarak úgy verődnek vissza, mintha az F (paraxiális) fókuszpontból indultak volna ki,

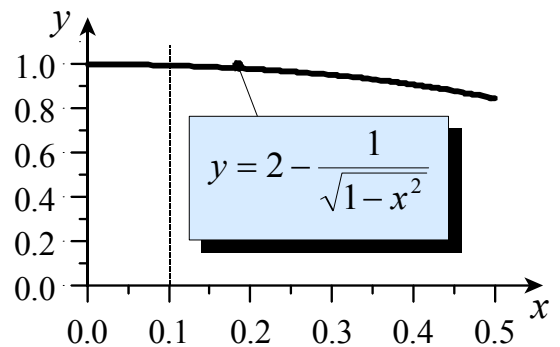
Azaz a tükröt széttartó nyaláb hagyja el! Ekkor fókuszpontot **virtuálisnak** nevezzük. Virtuális fókuszpont esetén – a számolások miatt – célszerű a fókusz távolságot negatívnak tekinteni.

$$\overline{OB} = \frac{r}{2} \rightarrow \overline{OF} = \frac{r}{2 \cdot \cos \alpha}$$

$$\cos \alpha = \overline{OB} / \overline{OF}$$

$$-f = \overline{CF} = r - \overline{OF} = \frac{r}{2} \cdot \left(2 - \frac{1}{\cos \alpha} \right)$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - (d/r)^2}$$



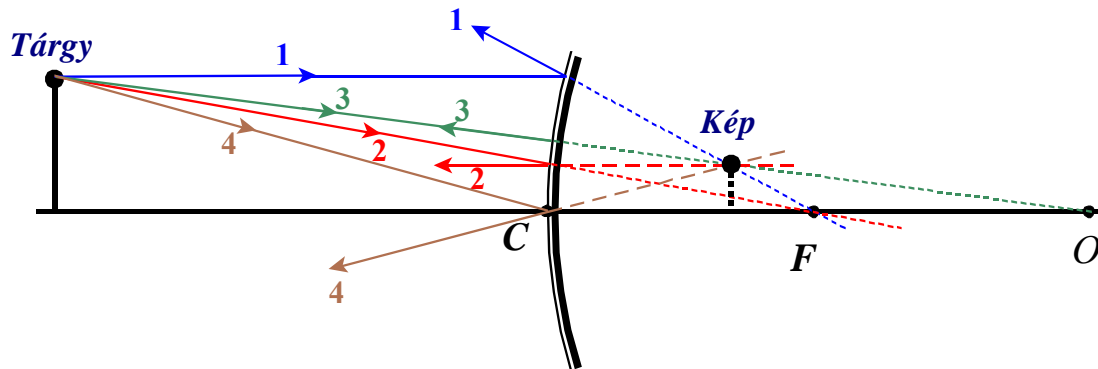
Paraxiális közelítésben

$$f = -r/2$$

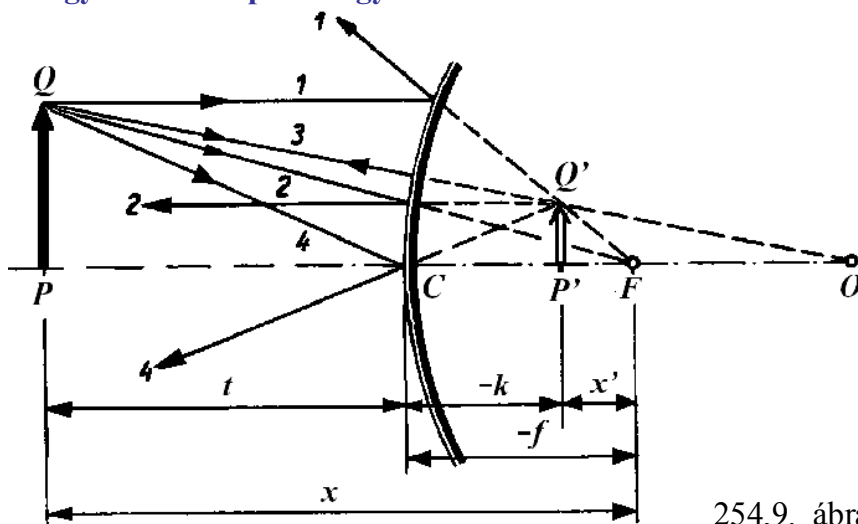


paraxiális fókusz távolság

Képszerkesztés nevezetes sugarakkal



Nagyítás és leképezési egyenlet



CPQ és $CP'Q'$
háromszögek hasonlóak

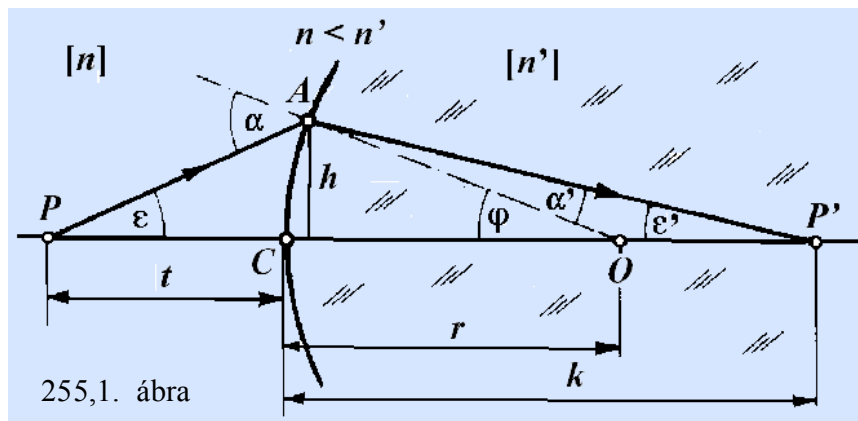
$$N = -\frac{k}{t} = -\frac{x'}{f} = -\frac{f}{x}$$

$$x \cdot x' = f^2$$

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

254,9. ábra

Optikai leképezés gömb- és síkfelületen való törés útján



255,1. ábra

$$n \sin \alpha = n' \sin \alpha'$$

Paraxiális közelítés

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \cos \alpha \approx 1$$

$$\epsilon = h/t$$

$$\phi = h/r$$

$$\epsilon' = h/k$$

$$PAO \Delta \rightarrow \alpha = \epsilon + \phi$$

$$AOP' \Delta \rightarrow \phi = \epsilon' + \alpha'$$

$$n \alpha = n \epsilon + n \phi$$

$$n' \alpha' = n' \phi - n' \epsilon'$$

$$n \alpha = n' \alpha'$$

$$n \epsilon + n \phi = n' \phi - n' \epsilon' \rightarrow n \epsilon + n' \epsilon' = (n' - n) \phi \rightarrow n \frac{h}{t} + n' \frac{h}{k} = (n' - n) \frac{h}{r}$$

Leképezési egyenlet:

$$\frac{n}{t} + \frac{n'}{k} = \frac{n' - n}{r}$$

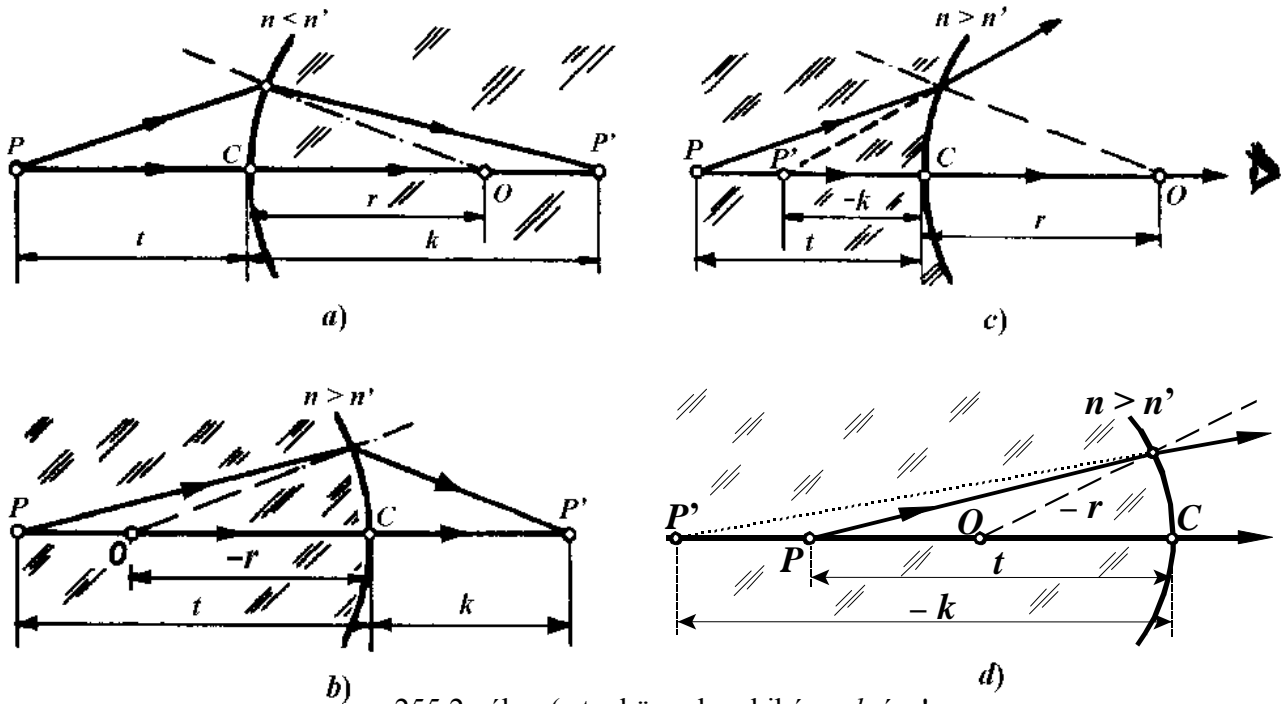
Törőerősség:

$$D = \frac{n' - n}{r}$$

P pontból kiinduló összes (paraxiális) sugár a törés után P' ponton halad keresztül!

Síkfelület esetén $r = \infty$, így ekkor a leképezési egyenlet sík törőfelületre: $\frac{n}{t} + \frac{n'}{k} = 0$

Lehetséges esetek valódi tárgy esetén



255,2. ábra (a tankönyvben hibás a d rész!)

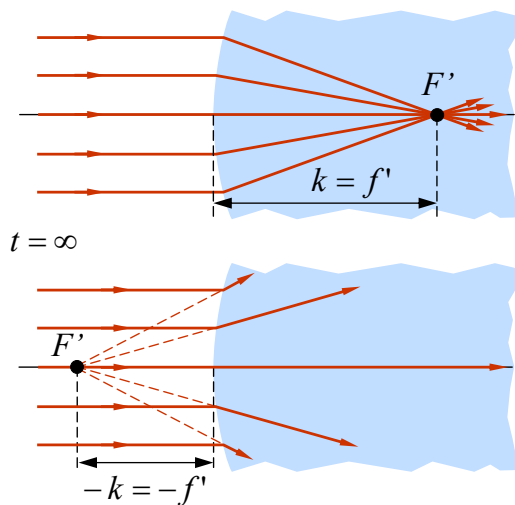
Előjel megállapodás a leképezési egyenlet alkalmazásánál (szemléletes rendszer)

- Ha a tárgy felől nézve a felület **domború**, akkor $r > 0$.
- Ha a tárgy felől nézve a felület **homorú**, akkor $r < 0$.
- **Valódi tárgy** esetén $t > 0$, **virtuális tárgy** esetén $t < 0$.
- **Valódi kép** esetén $k > 0$, **virtuális kép** esetén $k < 0$.

Fókuszpontok és fókusztávolságok

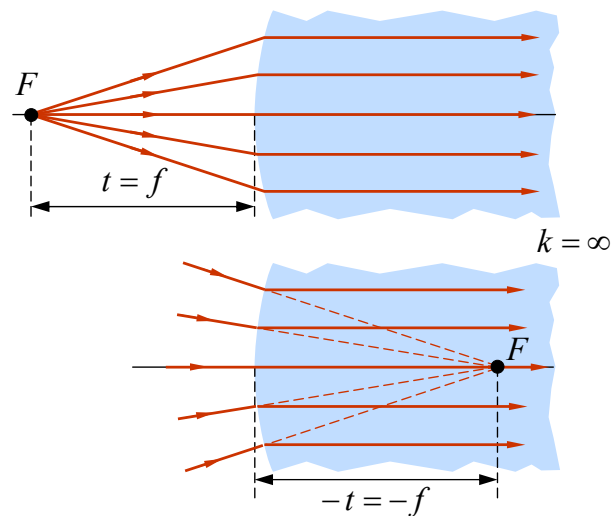
Képpoldali (hátsó) fókuszpont

- A tárgypoldalról beeső, az optikai tengellyel párhuzamos **sugarak** vagy **azok meghosszabbításai** az F' képpoldali fókuszponton mennek keresztül.



Tárgypoldali (elülső) fókuszpont

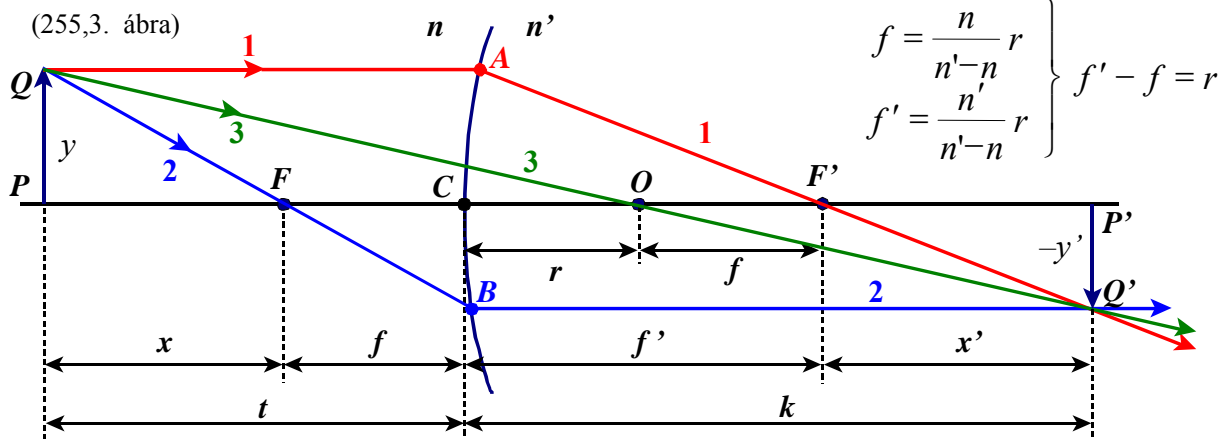
- A képpoldalról beeső, az optikai tengellyel párhuzamos **sugarak** vagy **azok meghosszabbításai** az F tárgypoldali fókuszponton mennek keresztül.



$$f' = \frac{n'}{n' - n} r \quad \leftarrow \quad \frac{n'}{f'} = \frac{n' - n}{r} \quad \leftarrow \quad \frac{n}{t} + \frac{n'}{k} = \frac{n' - n}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{n}{f} = \frac{n' - n}{r} \quad \rightarrow \quad f = \frac{n}{n' - n} r$$

$$\leftarrow \quad \boxed{f' - f = r} \quad \rightarrow$$

Képszerkesztés „nevezetes” sugarakkal



Leképezési egyenlet

$$\frac{n}{t} + \frac{n'}{k} = \frac{n'-n}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{n}{n'-n} r}{t} + \frac{\frac{n'}{n'-n} r}{k} = 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{f}{t} + \frac{f'}{k} = 1}$$

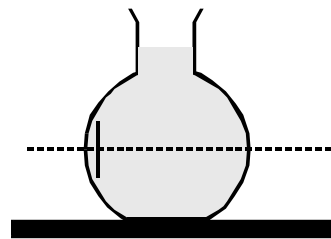
Newton-féle leképezési egyenlet

$$\begin{aligned} x = t - f &\rightarrow \frac{x}{t} = 1 - \frac{f}{t} \\ x' = k - f' &\rightarrow \frac{x'}{k} = 1 - \frac{f'}{k} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{t} \cdot \frac{x'}{k} = 1 - \frac{f}{t} - \frac{f'}{k} + \frac{f}{t} \cdot \frac{f'}{k} \quad \rightarrow \quad \boxed{x \cdot x' = f \cdot f'}$$

Oldalnagyítás

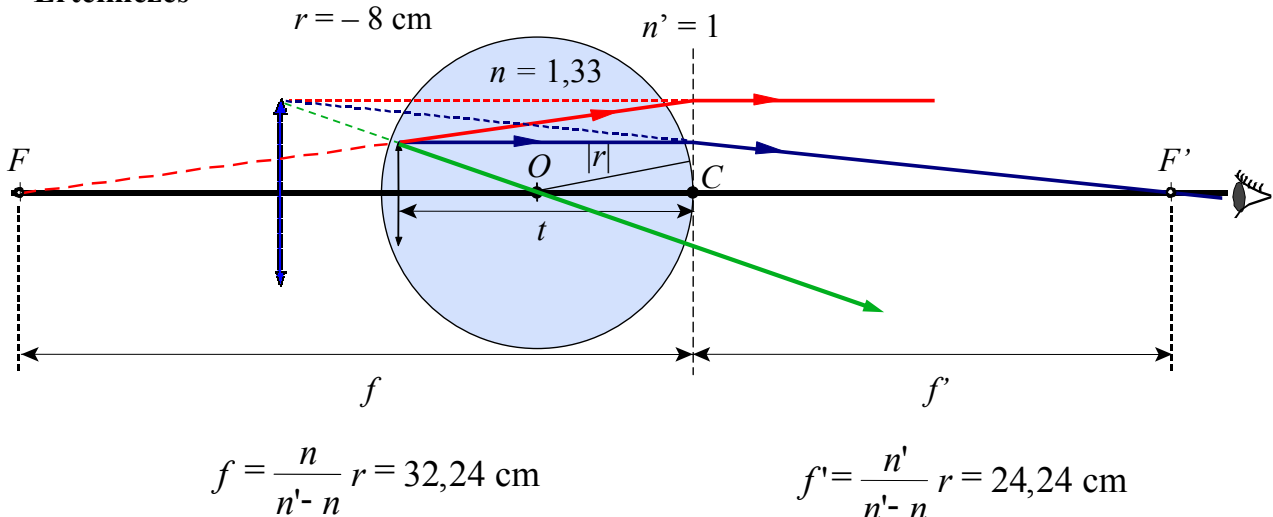
$$N = \frac{y'}{y} \quad \begin{array}{l} PQF \Delta \text{ és } BCF \Delta \\ P'Q'F' \Delta \text{ és } ACF' \Delta \end{array} \quad \rightarrow \quad \boxed{N = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'} = -\frac{nk}{n't}} \quad \leftarrow \quad \begin{array}{l} QCQ' \text{ fénysugár} \\ n \frac{y}{t} = n' \frac{-y'}{k} \end{array}$$

Kísérleti szemléltetés

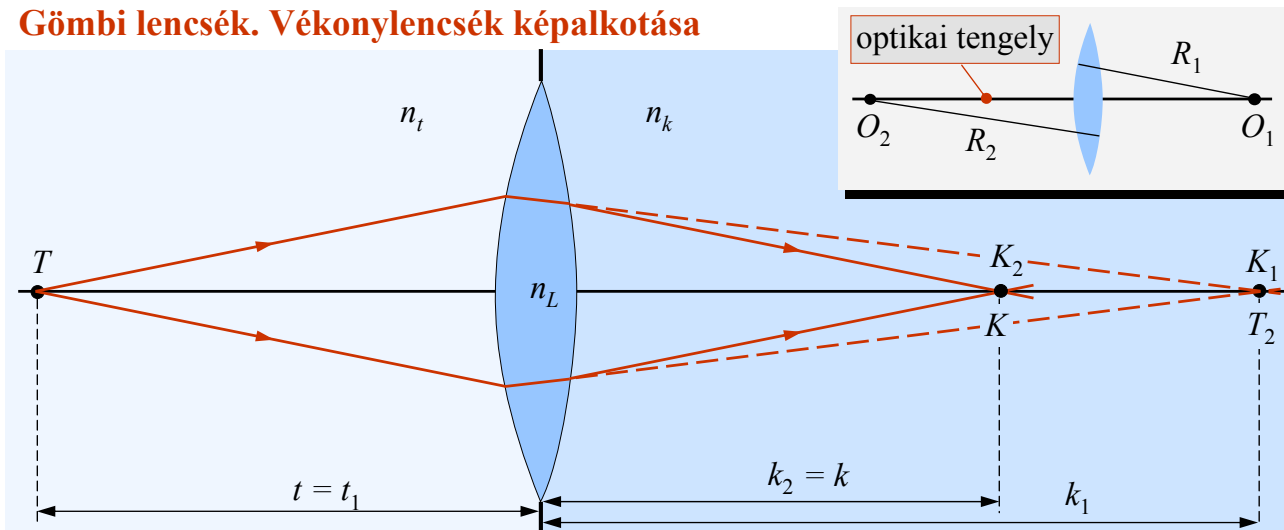


Egyenes állású nagyított képet látunk

Értelmezés



Gömbi lencsék. Vékonylencsék képképzése



Az elülső felület a K_1 képet alkotná, amely a hátsó felület jelenléte miatt valójában nem jön létre. A K_1 kép a hátsó felület képképzésénél virtuális tárgy. Ennek a képe a végső kép.

A lencse elülső felületének képképzése

$$\frac{n_t}{t_1} + \frac{n_L}{k_1} = \frac{n_L - n_t}{R_1}$$

$$t_1 = t \quad \rightarrow \quad \frac{n_t}{t} + \frac{n_L}{k_1} = \frac{n_L - n_t}{R_1}$$

A lencse hátsó felületének képképzése

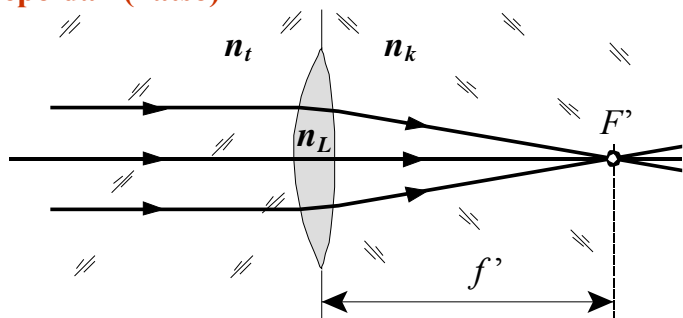
$$\frac{n_L}{t_2} + \frac{n_k}{k_2} = \frac{n_k - n_L}{-R_2}$$

$$t_2 = -k_1 \quad k = k_2 \quad \rightarrow \quad -\frac{n_L}{k_1} + \frac{n_k}{k} = \frac{n_L - n_k}{R_2}$$

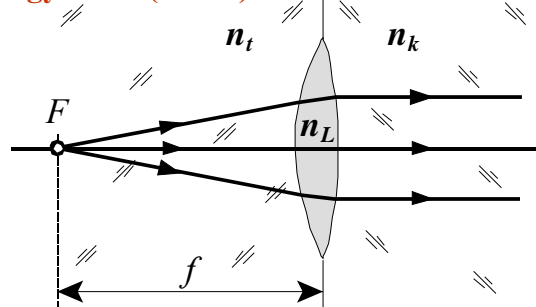
$$\frac{n_t}{t} + \frac{n_k}{k} = \frac{n_L - n_t}{R_1} + \frac{n_L - n_k}{R_2} = D_1 + D_2$$

A vékony lencsék gyújtópontjai és gyújtótávolságai

képpoldali (hátsó)



tárgyoldali (elülső)



$$\frac{n_t}{t} + \frac{n_k}{k} = \frac{n_L - n_t}{R_1} + \frac{n_L - n_k}{R_2} = D_1 + D_2$$

$$t = \infty$$

$$k = f'$$

$$\frac{n_k}{f'} = D_1 + D_2 \quad \rightarrow$$

$$f' = \frac{n_k}{D_1 + D_2}$$

$$\frac{n_t}{f} = \frac{n_k}{f'}$$

$$t = f$$

$$k = \infty$$

$$\frac{n_t}{f} = D_1 + D_2 \quad \rightarrow$$

$$f = \frac{n_t}{D_1 + D_2}$$

Mind a kép-, mind a tárgyoldali fókuszpontok lehetnek virtuálisak is!

Leképezési egyenlet

$$\frac{n_t}{t} + \frac{n_k}{k} = D_1 + D_2 \quad \rightarrow \quad \frac{n_t}{D_1 + D_2} + \frac{n_k}{D_1 + D_2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{f}{t} + \frac{f'}{k} = 1$$

$$\frac{n_t}{f} = \frac{n_k}{f'}$$







Sokszor $n_t = n_k$ így ekkor $f = f' \rightarrow \frac{f}{t} + \frac{f}{k} = 1 \rightarrow$

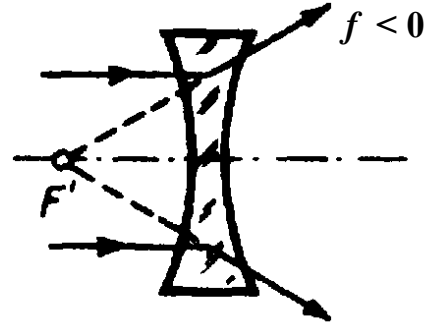
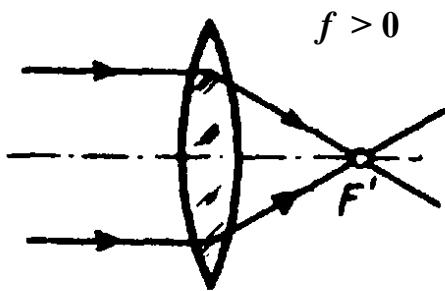
$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f} \quad \text{lencseegyenlet}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{D_1 + D_2}{n_t} = \frac{n_L - n_t}{n_t} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \rightarrow \frac{1}{f} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

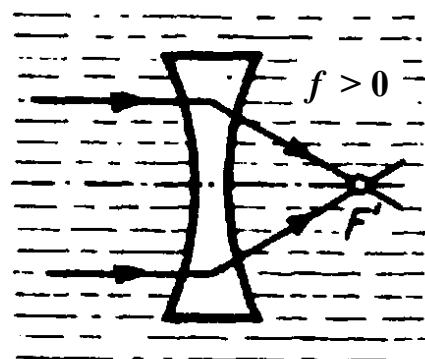
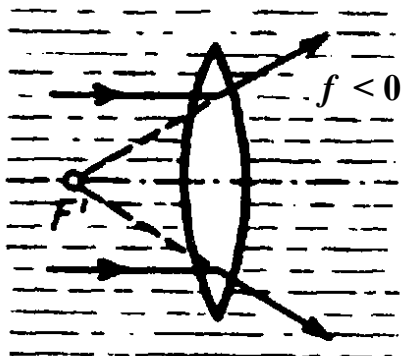
ahol $n = \frac{n_L}{n_t}$

Lencse típusok

						
	a_j	b_j	c_j	d_j	e_j	h_j
R_1	+	∞	-	-	∞	+
R_2	+	+	+	-	-	-



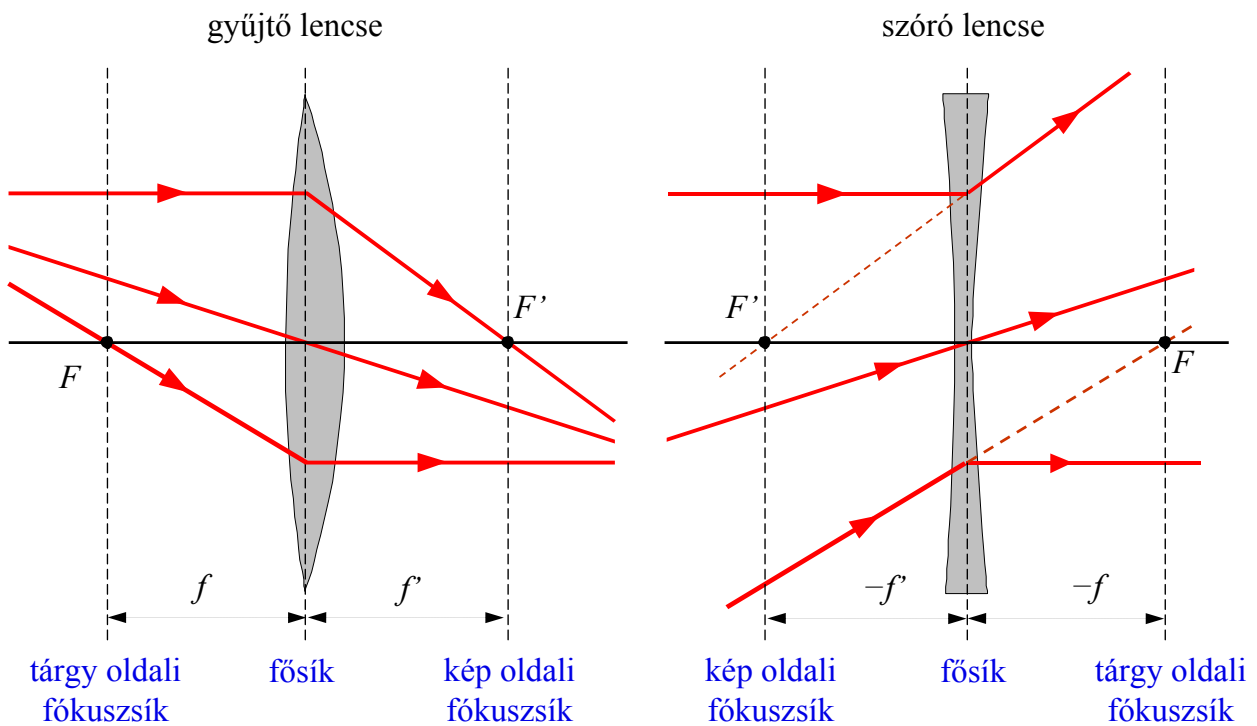
a, üveglencsék levegőben



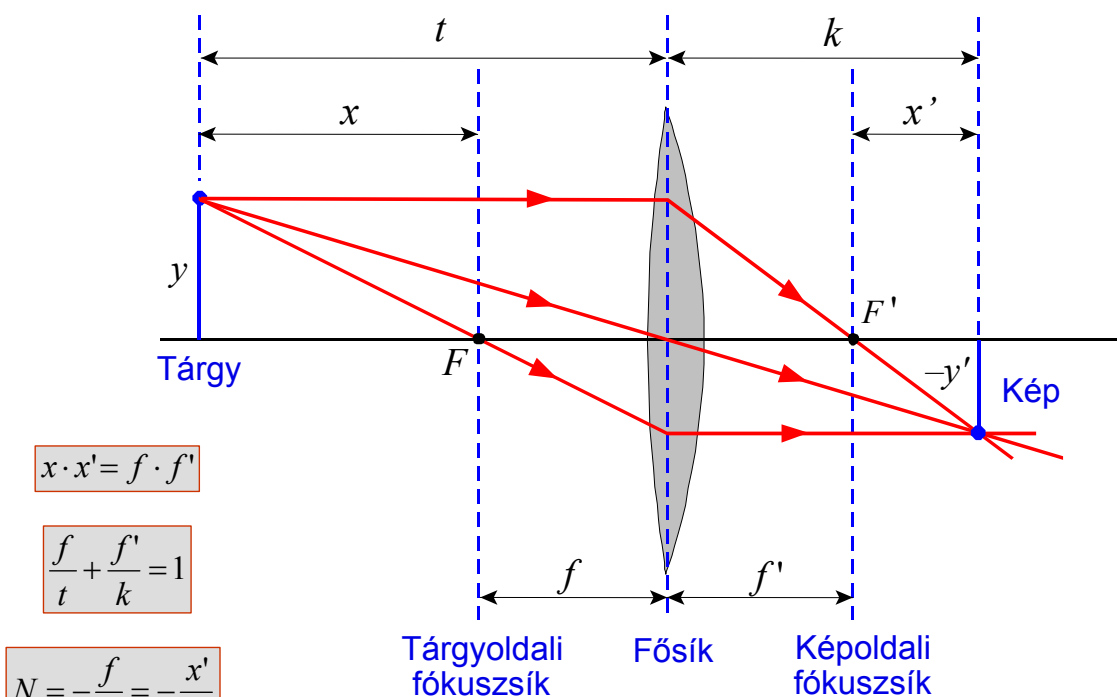
b, leveglencsék vízben

Képszerkesztés nevezetes sugármenetekkel, lencseegyenlet

Nevezetes sugármenetek ($f = f'$ esetén)



Képszerkesztés nevezetes sugármenetekkel ($f = f'$ esetén)



$$x \cdot x' = f \cdot f'$$

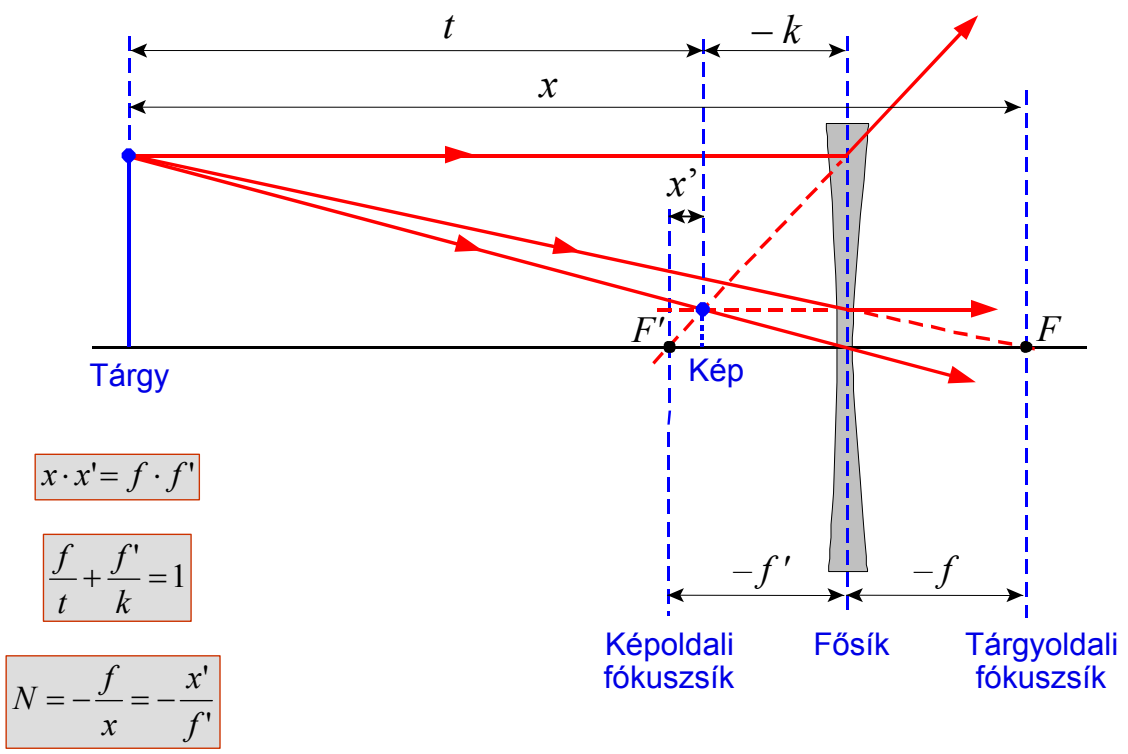
$$\frac{f}{t} + \frac{f'}{k} = 1$$

$$N = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}$$

$$N = -\frac{n \cdot k}{n' \cdot t}$$

$f = f'$ esetén: $x \cdot x' = f^2$, $\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$, $N = -\frac{k}{t} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f}$

Képszerkesztés nevezetes sugármenetekkel ($f = f'$ esetén)



$$x \cdot x' = f \cdot f'$$

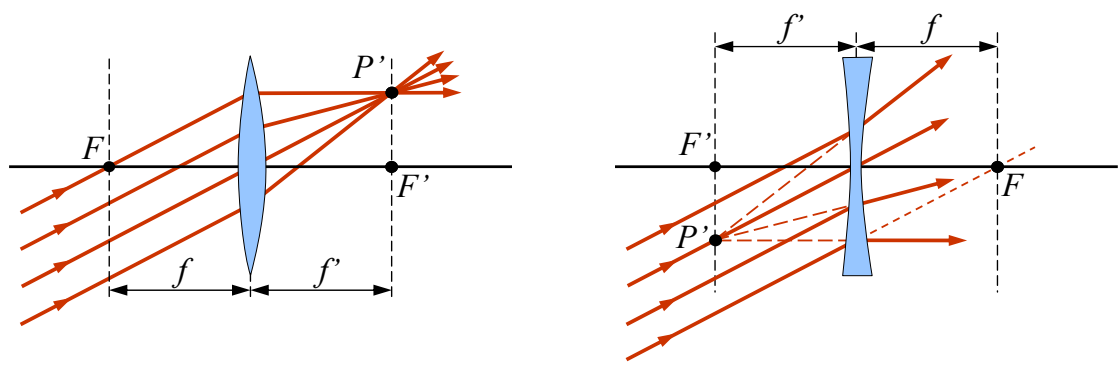
$$\frac{f}{t} + \frac{f'}{k} = 1$$

$$N = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}$$

$$N = -\frac{n \cdot k}{n' \cdot t}$$

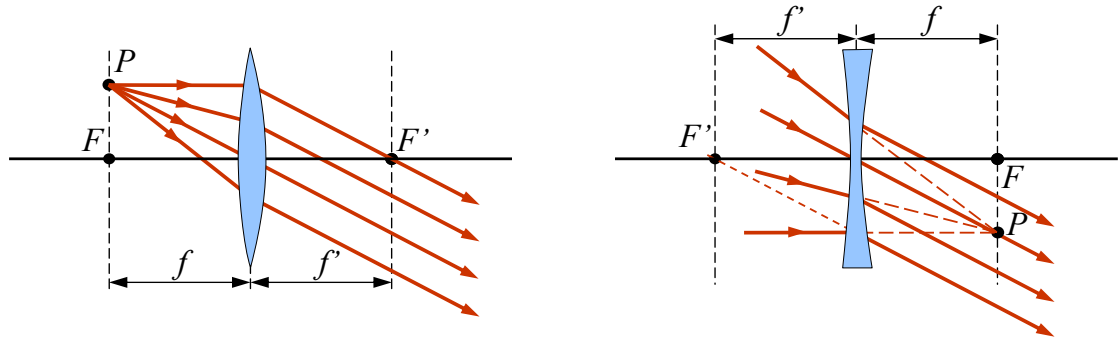
$f = f'$ esetén: $x \cdot x' = f^2$, $\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$, $N = -\frac{k}{t} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f}$

Nem főtengelyen lévő, végtelen távoli pont képe

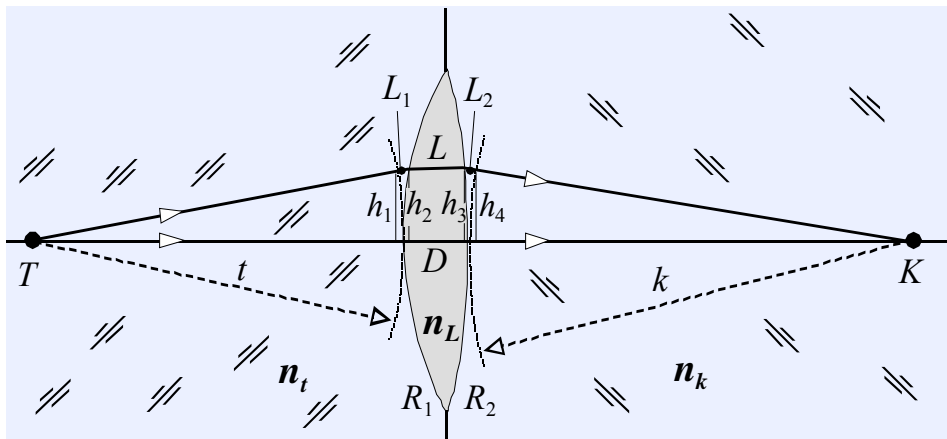


Fókusz síkbeli pont képe

- az előző sugármenetek megfordítása



Leképezési egyenlet tárgyalása Fermat elve alapján



$$t_{TK} = \frac{t + L_1}{c_t} + \frac{L}{c_L} + \frac{L_2 + k}{c_k}$$

$$n_t = c_0 / c_t$$

$$n_L = c_0 / c_L$$

$$n_k = c_0 / c_k$$

$$\Delta = c_0 t_{TK} = n_t(t + L_1) + n_L L + n_k(L_2 + k)$$

optikai úthossz

Képkötés esetén

- T -ből kiinduló sugarak K -n mennek keresztül, azaz
- mindegyik sugár mentén terjed a fény!
- A *Fermat* elve miatt az összes sugárra azonosnak kell lenni az optikai úthossznak, mert ha nem így lenne, akkor csak azon sugár mentén terjedne a fény, amelyen a legrövidebb az optikai úthossz (és így a terjedési idő).

A tengely menti sugárra $L_1 = 0$, $L = D$ és $L_2 = 0$, ezért $\Delta = n_t t + n_L D + n_k k$

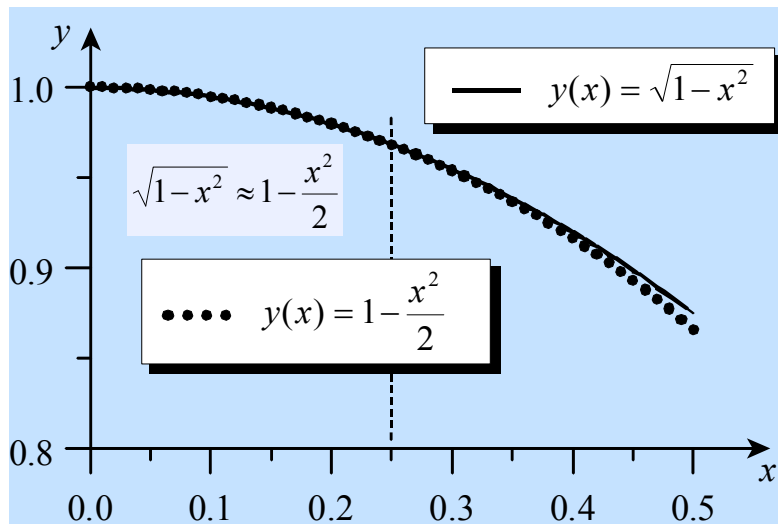
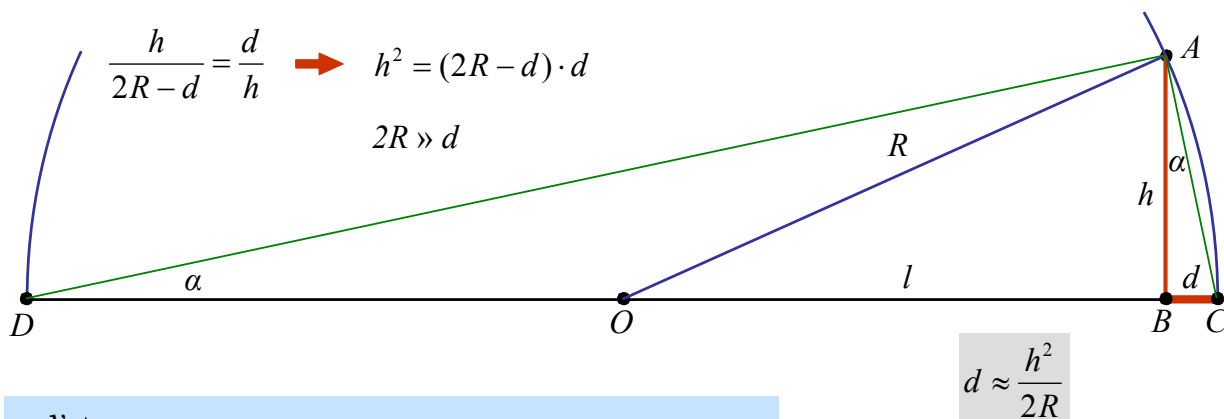
$$n_t t + n_L D + n_k k = n_t(t + L_1) + n_L L + n_k(L_2 + k)$$



$$n_L(D - L) = n_t L_1 + n_k L_2$$

Paraxiális közelítés

DBA és ABC derékszögű háromszögek hasonlók

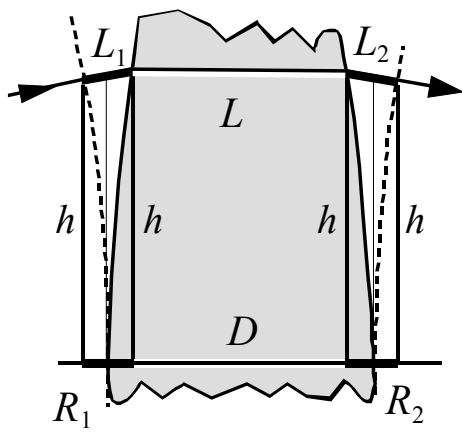


Analitikus számolással:

$$\begin{aligned} d &= R - l = R - \sqrt{R^2 - h^2} = \\ &= R - R\sqrt{1 - (h/R)^2} = \\ &= R \cdot \left(1 - \sqrt{1 - (h/R)^2}\right) \end{aligned}$$

paraxiális közelítésben

$$d \approx \frac{h^2}{2R}$$



vékony lencsékre

$$h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h$$

paraxiális közelítés

$$L_1 = \frac{h^2}{2t} + \frac{h^2}{2R_1} = \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{R_1} \right)$$

$$L_2 = \frac{h^2}{2R_2} + \frac{h^2}{2k} = \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$L = D - \frac{h^2}{2R_1} - \frac{h^2}{2R_2} = D - \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$n_L(D - L) = n_t L_1 + n_k L_2 \quad \rightarrow \quad \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot n_L = \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{R_1} \right) \cdot n_t + \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot n_k$$

$$\frac{n_t}{t} + \frac{n_k}{k} = \frac{n_L - n_t}{R_1} + \frac{n_L - n_k}{R_2}$$