

Mechanika

FBL101E-1

2. előadás

Dr. Geretovszky Zsolt

2010. október 1.

Kényszererő

A *szabad mozgásokkal* (hajítás, rezgőmozgás, stb.) szemben a *kényszermozgásoknál* a testnek mozgása során egy merevnek tekinthető felületen vagy görbén kell maradnia (*geometriai kényszer*).

A kényszererő egy „eszköz” annak a problémának a kezelésére, hogy egyes esetekben a testek mozgását geometriai feltételek korlátozzák: a kényszererő egy olyan erő, melyet azért veszünk fel, hogy a test mozgása kielégítsen valamiféle geometriai kényszert.

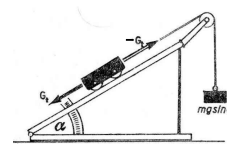
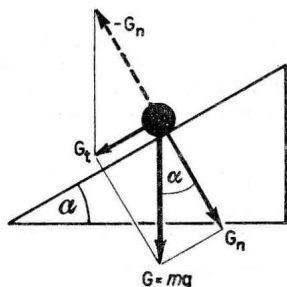
Míg a szabaderők általában ismertek, addig a kényszererők meghatározása a feladat része (pl. nyomóerő).

$$m\vec{a} = \vec{F}_{szabad} + \vec{F}_{kényszer}$$

Vízszintes talajra tett test:

Kényszermozgások 1.

Súrlódásmentes mozgás lejtőn:

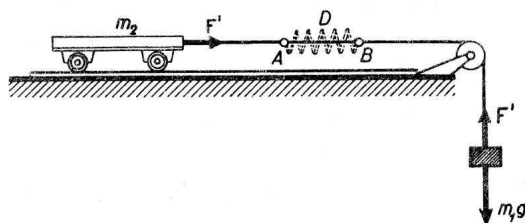


$$G_n = mg \cos \alpha, \quad G_t = mg \sin \alpha$$

$$a = g \sin \alpha \implies \text{Galilei-féle lejtő}$$

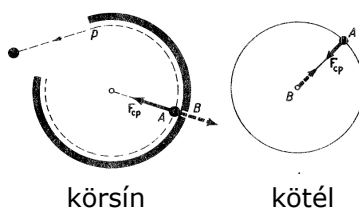
Súllyal mozgatott kiskocsi:

(a kényszert a nyújthatatlannak feltételezett, elhanyagolható tömegű fonál jelenti)



Kényszermozgások 2.

Egyenletes körmozgás:

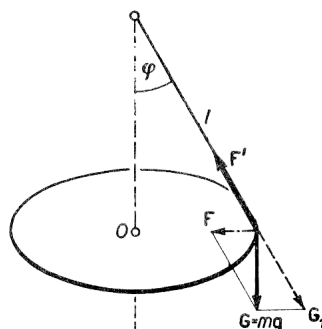


körsín

kötél

Kúpinga:

(a kényszert a nyújthatatlannak feltételezett, elhanyagolható tömegű fonál jelenti)



Surlódás, tapadás

Surlódási erő, tapadási erő

érintkező felületek között ébredő erők

Surlódás

a felületek egymáshoz képest mozognak

$$F_{cs} = \mu F_{ny} \quad \vec{F}_{cs} = -\mu F_{ny} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Tapadás

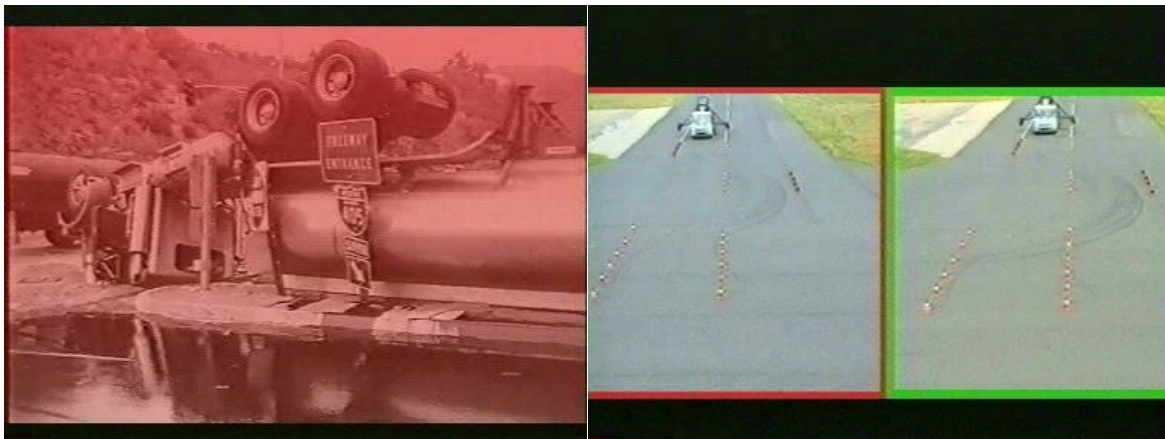
a felületek egymáshoz képest nyugalomban vannak

$$F_t \leq \mu_0 F_{ny} \quad \mu \leq \mu_0$$

Példák:

blokkolásgátló (ABS, fékezéskor),
kipörgésgátló (ASR, gyorsításkor),
felborulás megelőzés (ROP - Roll Over Prevention, kanyarodáskor)

Roll Over Prevention



© Knorr-Bremse

Amikor a belső íven futó kerék elemelkedik a földről, akkor a külső íven futó kereket befékezik. A fékezés hatására a külső kerék csúszni kezd, s így esély van rá, hogy a trailer ahelyett, hogy felborulna "csak" kifaroljon.

Megmaradási törvények, szimmetriák

Szimmetria	Megmaradó mennyiség
Térbeli eltolás	Impulzus
Elforgatás	Impulzusmomentum
Időbeli eltolás	Energia

A megmaradási törvények felismerésének eszköze **az időbeli derivált**.

Alaptételek tömegpontra 1.

A tömegpont *impulzusának* bevezetése:

$$\vec{I} = m\vec{v}$$

Az impulzustétel:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{I}}{dt} = m\vec{a}$$

Ha $\vec{F} = 0$, akkor $\frac{d\vec{I}}{dt} = 0$

ami ekvivalens azzal, hogy $\vec{I} = \text{áll.}$

Ha a tömegpontra ható erők eredője zérus, akkor a tömegpont impulzusa megmarad. (impulzusmegmaradás tétele)

Erőlökés:

$$\frac{\Delta\vec{I}}{\Delta t} = \vec{F} \longrightarrow \Delta\vec{I} = \vec{I}_2 - \vec{I}_1 = \left(\int_0^{\tau} \vec{F} dt \right) \approx \vec{F} \tau$$

ahol τ a kölcsönhatás ideje

Alaptételek tömegpontra 2.

A tömegpont *impulzusmomentumának* (régiesen impulzusnyomaték) bevezetése:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{I} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

jobbkez-szabály: $\vec{h} = \vec{m} \times \vec{k}$

hüvelyk mutató középső mutató

Egy F erő O pontra vonatkozó forgatónyomatéka:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

ahol r vektor az O pontból az F erő támadáspontjába mutató vektor

Az impulzusmomentum-tétel (levezetése):

$$\vec{M} = \frac{d\vec{N}}{dt}$$

Ha $\vec{M} = 0$, akkor $\frac{d\vec{N}}{dt} = 0$

ami ekvivalens azzal, hogy $\vec{N} = \text{áll.}$

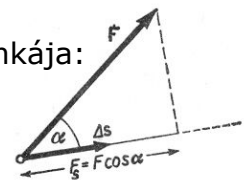
Ha a tömegpontra ható erők (forgató)nyomatéka zérus, akkor a tömegpont impulzusmomentuma megmarad. (impulzusmomentum megmaradásának tétele)

Egy kis kitérő ...

A munka

Az egyenes pályán mozgó pontszerű testre ható állandó erő munkája:

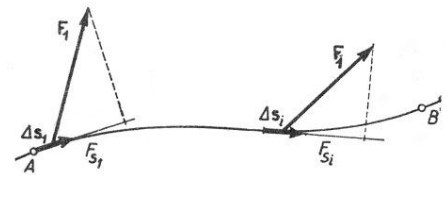
$$W = |\vec{F}| |\Delta\vec{r}| \cos \alpha = \vec{F} \Delta\vec{r} = F_s \Delta s$$



A munka fogalmának általánosítása:

a mozgás i -edik szakaszán az ún. elemi munka $\Delta W_i = |\vec{F}_{\Delta r, i}| |\Delta\vec{r}_i| = F_{s, i} \Delta s_i$

$$W \approx \sum_{i=1}^n F_{s, i} \Delta s_i \quad W = \int_A^B F_s(s) ds$$



Néhány erőfajta munkája:

nehézségi erő: $W = mg\Delta h$

rugóerő: $W = \frac{1}{2} D\Delta x^2$

kényszererő: ha a kényszererő merőleges a sebességre, akkor 0

A teljesítmény

Valamely erő teljesítménye:

$$P = \frac{W}{t} \quad \text{ha } W \text{ nem arányos } t\text{-vel, akkor átlag teljesítmény}$$

Pillanatnyi teljesítmény:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \left(= \frac{dW}{dt} \right)$$

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \vec{v}$$

Az energia

Egy meghatározott A állapotban lévő test vagy rendszer energiával rendelkezik akkor, ha alkalmas körülmények között munkavégzésre képes. Energiáját azzal a munkával mérjük, amelyet a test végez, míg az A állapotból egy megállapodás szerint választott A_0 állapotba jut, vagy azzal a munkával, amelyet a testre ható erők ellenében végeznünk kell, míg a testet A_0 -ból az A állapotba juttatjuk.

Mivel a testnek pl. a padlón nyugvó (A_0) helyzetből a h magasságba történő viteléhez mgh emelési munkát kell végezzünk, így a h magasságban levő m tömegű testnek súlyából származó helyzeti (vagy potenciális) energiája:

$$E_{pot} = mgh$$

(Kísérlet: szög beverés a leejtett test munkája révén)
colop_rudugro.mpg 2:10-)

A mozgó testeknek sebességük révén meglévő munkavégző képességét *mozgási vagy kinetikai energiának* nevezzük, melynek mértéke az m tömegű, kezdetben nyugvó test v sebességre való felgyorsításához szükséges munka:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$$

Alaptételek tömegpontra 3.

EVEV mozgást végző testre hasson állandó eredő erő:

$$W = F_s s = mas = m \frac{v_2 - v_1}{t} \frac{v_2 + v_1}{2} t = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2$$

Mozgási, vagy kinetikai energia:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} mv^2$$

A tömegpont mozgási energiájának megváltozása egyenlő a tömegpontra ható erők eredőjének munkájával. (munkatétel, vagy kinetikai energia tétele)

$$\Delta E_{kin} = W$$

Konzervatív erő: minden olyan, időben változatlan erő, melynek két tetszőleges pontot összekötő görbék mentén végzett munkája független a görbétől, csak a kezdő- és végpont helyzeteitől függ.

Ha a tömegpontra ható erők eredője konzervatív erő, akkor a tömegpont kinetikai (mozgási) és potenciális (helyzeti) energiájának összege, azaz a tömegpont teljes mechanikai energiája állandó. (a mechanikai energia megmaradásának tétele)

$$E_{kin} + E_{pot} = E_{mechanikai} = \text{állandó}$$

(Kísérlet: fonálinga helyzeti energia átalakulása mozgásivá)

<http://techtv.mit.edu/videos/1491-potential-energy-to-kinetic-energy>)

Pontrendszerek

Lehet

szabad pontrendszer, pl. Naprendszer

kötött pontrendszer, pl. súlyzómodell

(a tömegpontok mozgását valamiféle geometriai természetű kényszer korlátozza)

Külső erők:

a pontrendszerhez nem tartozó testektől származó erők

Belső erők:

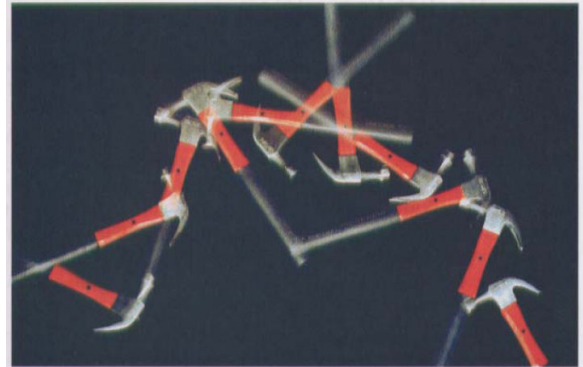
a pontrendszer tagjai között ébredő erők

Mindkét erőfajta lehet szabad vagy kényszererő.

Megmaradási tételek pontrendszerre 1.

Egy pontrendszer impulzusának idő szerinti differenciálhányadosa egyenlő a rendszerre ható összes **külső** erők eredőjével. (*pontrendszer teljes impulzusa*)

Egy mechanikai rendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha a rendszer egész tömege ebbe a pontba lenne egyesítve és a rendszer összes **külső** erőinek eredője erre a pontra hatna. (tömegközéppont mozgásának tétele, vagy súlyponttétel, *tömegközéppont*)



(Kísérletek:

1) *alaktalan tárgyak hajtása*

<http://techtv.mit.edu/videos/3052-center-of-mass-trajectory>

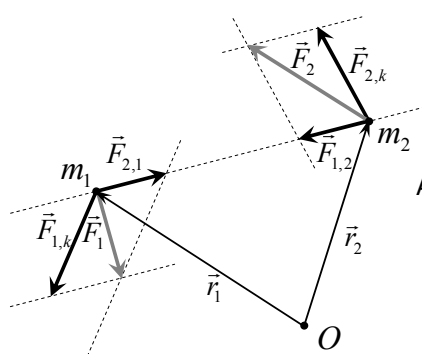
2) *tricykli meghajtás tűzoltó készülékkel*

<http://techtv.mit.edu/videos/1067-fire-extinguisher-on-a-tricycle>

a rakétahajtás elve

Ha a rendszerre nem hatnak külső erők, vagy ha ezek eredője zérus, akkor a rendszer impulzusa állandó, azaz a tömegközéppont evem-t végez, vagy nyugalomban van. (zárt rendszer)

Az impulzustétel származtatása



$\vec{F}_{1,k}$ és $\vec{F}_{2,k}$ a pontrendszeren kívülről származó külső erők

$\vec{F}_{1,2}$ és $\vec{F}_{2,1}$ a pontrendszer pontjai között ható, N-III axiómáját kielégítő belső erők

A mozgásegyenlet

az 1. tömegpontra: $\vec{F}_{1,k} + \vec{F}_{2,1} = \frac{d\vec{I}_1}{dt}$

a 2. tömegpontra: $\vec{F}_{2,k} + \vec{F}_{1,2} = \frac{d\vec{I}_2}{dt}$

a pontrendszerre: $\vec{F}_{1,k} + \vec{F}_{2,k} + \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{1,2} = \frac{d\vec{I}_1}{dt} + \frac{d\vec{I}_2}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^2 \vec{I}_i \equiv \frac{d\vec{I}}{dt}$

ahol $\vec{I} = \sum_{i=1}^2 \vec{I}_i$ a pontrendszer (teljes) impulzusa

erőlökéssel kifejezve $\vec{F}_{1,k} \Delta t + \vec{F}_{2,k} \Delta t + \vec{F}_{2,1} \Delta t + \vec{F}_{1,2} \Delta t = \Delta \vec{I}$

$$\Delta \vec{I}_{1,k} + \Delta \vec{I}_{2,k} + \Delta \vec{I}_{2,1} + \Delta \vec{I}_{1,2} = \Delta \vec{I}$$

N-III axiómája értelmében $\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$ $\Delta \vec{I}_{2,1} = -\Delta \vec{I}_{1,2}$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,k} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{I}_i = \frac{d\vec{I}}{dt}$$

Egy pontrendszer impulzusának idő szerinti differenciálhányadosa egyenlő a rendszerre ható összes **külső** erők eredőjével.

A tömegközéppont bevezetése

Írjuk fel a pontrendszerre vonatkozó impulzustételt:

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_{\text{külső},i} &= \frac{d \sum_i \vec{I}_i}{dt} = \frac{d \left(\sum_i m_i \vec{v}_i \right)}{dt} = \frac{d \left(\sum_i m_i \frac{d \vec{r}_i}{dt} \right)}{dt} = \frac{d \left(\frac{d \sum_i m_i \vec{r}_i}{dt} \right)}{dt} = \frac{d^2 \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right)}{dt^2} = \\ &= \frac{\sum_j m_j d^2 \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right)}{\sum_j m_j dt^2} = \sum_j m_j \frac{d^2 \left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_j m_j} \right)}{dt^2} = \sum_j m_j \frac{d^2 \vec{r}_{TKP}}{dt^2} = m_{\text{összes}} \vec{a}_{TKP} \end{aligned}$$

a deriválás és az összegzés sorrendje felcserélhető

a tömegpontok tömege időben állandó

bővítve a pontrendszer össztömegével

Ez pedig a tömegközéppont mozgásának tétele.

$$\vec{r}_{TKP} \equiv \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Egy test súlypontja az a pont, melyen a test súlyának hatásvonala a test minden helyzetében átmegy, s amely pont ezért a test súlyának támaszpontjaként tekinthető.

Archimedes

Megmaradási tételek pontrendszerre 2.

Egy pontrendszer impulzusnyomatékának idő szerinti differenciálhányadosa egyenlő a rendszerre ható **külső** erők forgatónyomatékainak eredőjével. (pontrendszer teljes impulzusmomentuma)

Ha a pontrendszerre nem hatnak külső erők (azaz zárt rendszer esetén), vagy ha a külső erők forgatónyomatékainak eredője zérus, akkor a rendszer impulzusmomentuma állandó.

A tengely körül forgó merev testek esetén az impulzusmomentum

$$N_z = \Theta \omega_z$$

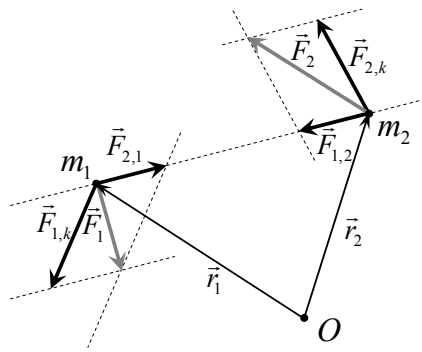
alakban is felírható, ahol Θ a test tömegeloszlásától függő tehetetlenségi nyomatéka, míg ω_z a forgómozgás szögsebessége.

(Kísérletek:

1) mozdony bicajkeréken, 2) forgószámoly
TAMOP 7:00-7:30 és 4:45-5:20)

A pontrendszer mozgási energiájának megváltozása egyenlő a pontrendszerre ható külső és belső erők munkáinak összegével.

Az impulzusmomentum tétel származtatása



$\vec{F}_{1,k}$ és $\vec{F}_{2,k}$ a pontrendszeren kívülről származó külső erők

$\vec{F}_{1,2}$ és $\vec{F}_{2,1}$ a pontrendszer pontjai között ható, N-III axiómáját kielégítő belső erők

A mozgásegyenleteket balról vektoriálisan szorozva \vec{r}_i -vel:

az 1. tömegpontra: $\vec{r}_1 \times \vec{F}_{1,k} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{2,1} = \frac{d\vec{N}_1}{dt}$

a 2. tömegpontra: $\vec{r}_2 \times \vec{F}_{2,k} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{1,2} = \frac{d\vec{N}_2}{dt}$

a pontrendszerre: $\vec{r}_1 \times \vec{F}_{1,k} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{2,k} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{2,1} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{1,2} = \frac{d\vec{N}_1}{dt} + \frac{d\vec{N}_2}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^2 \vec{N}_i \equiv \frac{d\vec{N}}{dt}$

ahol $\vec{N} = \sum_{i=1}^2 \vec{N}_i$ a pontrendszer (teljes) impulzusmomentuma

N-III axiómája értelmében $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} \longrightarrow \sum_{i=1}^2 \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,k} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{2,1} = \frac{d\vec{N}}{dt}$

A bal oldalon szereplő második tag 0, mert az $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ vektor m_2 -ből m_1 -be mutat, azaz párhuzamos $F_{2,1}$ -gyel.

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,k} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \frac{d\vec{N}}{dt}$$

Egy pontrendszer impulzusnyomatékának idő szerinti differenciálhányadosa egyenlő a rendszerre ható **külső** erők forgatónyomatékainak eredőjével.

Ütközések

Csoportosítása:

egyeses-ferde (attól függően, hogy az ütköző testek sebességei a tkp-jaikat összekötő egyenesbe esnek-e);

(Kísérlet: **biliárd golyók ferde ütközése**)

Film: 700/62 50:49-)

centrális-nem centrális (attól függően, hogy az ütköző testek érintkezési pontja rajta van-e a testek tkp-jait összekötő egyenesen);

(Kísérlet: **pattogó golyók**)

Film: 700/57 47:31-)

Rugalmas ütközés (az impulzus és a mech. energia is megmarad):

$$m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$$

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$v'_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

(Kísérlet: **rugalmatlan ütközés légpárnás sínen**)

Film: 700/68 54:59-)

Rugalmatlan ütközés (impulzus megmarad, mech. energia nem):

$$(m_1 + m_2) \mathbf{v}' = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$$

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

(Kísérlet: **ballisztikus inga**)

<http://www.youtube.com/watch?v=oNGm4mVWMuY>

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$v_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Rugalmas ütközés

(Kísérlet: kiskocsi rugalmas ütközése légpárnás sínen)

Film: 700/65 51:52-)

1) Mozgó kocsi ütközik azonos tömegű álló kocsinak:

$$m_1 = m_2 = m \quad v_1 = \text{áll.} \quad \longrightarrow \quad v_1' = 0$$

$$v_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad v_2' = v_1$$

2) Mozgó kocsi ütközik kétszeres tömegű álló kocsinak:

$$m_1 = m \quad v_1 = \text{áll.} \quad \longrightarrow \quad v_1' = -\frac{1}{3} v_1$$

$$m_2 = 2m \quad v_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad v_2' = \frac{2}{3} v_1$$

3) Mozgó kocsi ütközik leszorított kocsinak:

$$m_1 = m \quad v_1 = \text{áll.} \quad \longrightarrow \quad v_1' = -v_1$$

$$m_2 = \infty \quad v_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad v_2' = 0$$

A videó kísérleti adatait hasonlítsák össze a modell jóslataival!

Az időadatok a 0,6m út megtételéhez szükséges időt mutatják.

$m_1 = m; m_2 = m$	1. kocsi		2. kocsi	
	előtt	után	előtt	után
	$t_1 = 1,149s$	áll	áll	$t_2' = 1,151s$
	$v_1 =$	$v_1' = 0$	$v_2 = 0$	$v_2' =$

$m_1 = m; m_2 = 2m$	1. kocsi		2. kocsi	
	előtt	után	előtt	után
	$t_1 = 0,817s$	$t_1' = 2,566s$	áll	$t_2' = 1,293s$
	$v_1 =$	$v_1' = -$	$v_2 = 0$	$v_2' =$

$m_1 = m; m_2 = 3m$	1. kocsi		2. kocsi	
	előtt	után	előtt	után
	$t_1 = 0,929s$	$t_1' = 2,014s$	áll	$t_2' = 2,021s$
	$v_1 =$	$v_1' = -$	$v_2 = 0$	$v_2' =$

$m_1 = 2m; m_2 = m$	1. kocsi		2. kocsi	
	előtt	után	előtt	után
	$t_1 = 1,127s$	$t_1' = 3,485s$	áll	$t_2' = 0,865s$
	$v_1 =$	$v_1' = +$	$v_2 = 0$	$v_2' =$

$m_1 = 3m; m_2 = m$	1. kocsi		2. kocsi	
	előtt	után	előtt	után
	$t_1 = 1,411s$	$t_1' = 2,867s$	áll	$t_2' = 0,958s$
	$v_1 =$	$v_1' = +$	$v_2 = 0$	$v_2' =$