Mechanika
FBL101E-1

3. előadás

2010. október 15.

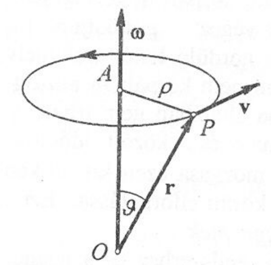
Merev testek kinematikája

Egy pontrendszert merev testnek tekintünk, ha bármely két pontjának távolsága állandó. (f=6, Euler)

A merev test tetszőleges mozgása leírható elemi transzlációk és elemi rotációk összegeként.

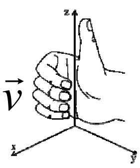
Elfordulás a z-tengely körül:

$$v_y = x\omega, \quad v_x = -y\omega, \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



$\vec{\omega}$

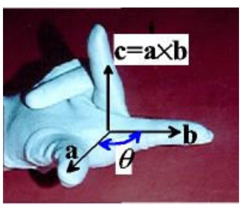
$\vec{v}$



jobbcsavar

$$\vec{h} = \vec{m} \times \vec{k}$$

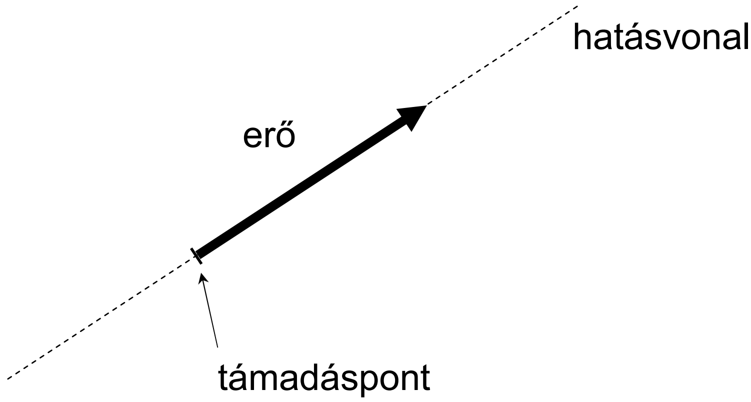
hüvelyk középső
mutató



jobbkéz-szabály

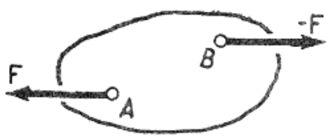
$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\theta$$

Merev testre ható erő

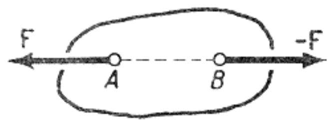


Merev testre ható erőrendszer redukálása 1.

A merev test két egyenlő nagyságú és ellentétes irányú erő hatása alatt akkor van egyensúlyban, ha az erők hatásvonalai egybeesnek.



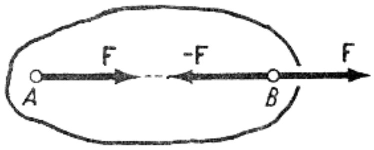
nincs egyensúlyban



egyensúlyban van

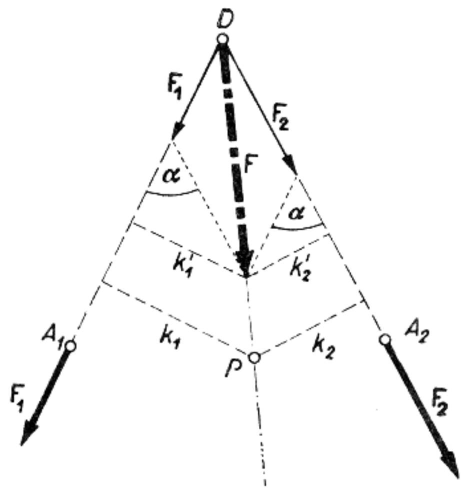
Merev testre ható erőrendszer redukálása 2.

A merev testre ható erő támadáspontja a testben a ***hatásvonal mentén*** tetszőlegesen eltolható.



Merev testre ható erőrendszer redukálása 3.

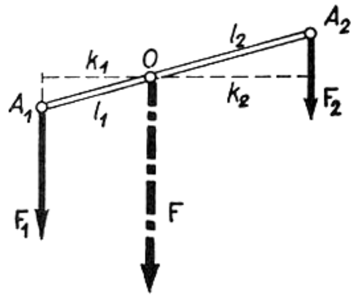
Két nem párhuzamos hatásvonalú erő összetevése.



$$F_1 k_1 = F_2 k_2$$

Merev testre ható erőrendszer redukálása 4.

Két párhuzamos hatásvonalú, azonos irányú erő összetevése.

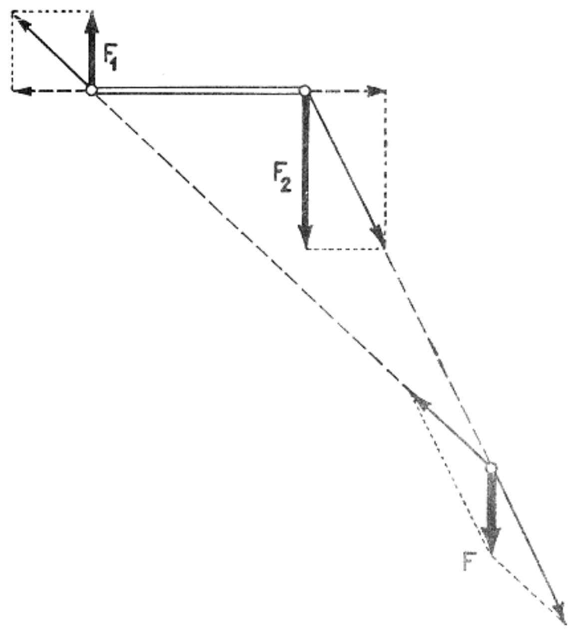


$$F = F_1 + F_2$$

$$F_1 k_1 = F_2 k_2$$

Merev testre ható erőrendszer redukálása 5.

Két párhuzamos hatásvonalú, ellentétes irányú, de nem egyenlő nagyságú erő összetevése.



Az erőpár

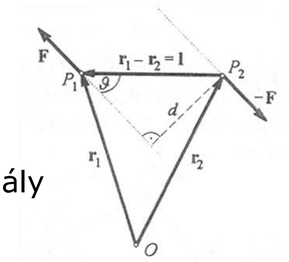
Erőpár: két antiparalel, egyenlő nagyságú és különböző hatásvonalú erő. Hatása NEM helyettesíthető egyetlen erővel.

Az **erőpár forgatónyomatéka** független a forgáspont helyzetének megválasztásától, iránya – a jobbcsavarnak megfelelően – merőleges az erőpár síkjára, nagysága pedig az erőkar (d) és az egyik erő nagyságának (F) szorzatával egyezik meg.

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{l} \times \vec{F}$$

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{l}\right| \cdot \left|\vec{F}\right| \cdot \sin\vartheta = F \cdot d$$

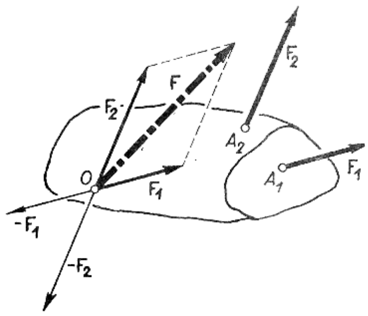
irány: jobbkéz-szabály



A **tengelyre vonatkoztatott forgatónyomaték** ekvivalens az erőpár forgatónyomatékával (az erő „párja” a tengelyben ébred).

Tetszőleges erőrendszer redukálása

Ha egy merev testre *n* db erő hat, akkor ezen erők hatása ekvivalens a test egy O pontjában vett eredőjük és az erőkből képezhető *n* erőpár forgatónyomatékainak hatásával.



Egy tetszőleges erőrendszer hatása redukálható egy eredő erőre és egy eredő forgatónyomatékra.

$$\vec{F}_e = \sum_i \vec{F}_i \quad \acute{e}s \quad \vec{M}_e = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

A merev test egyensúlya

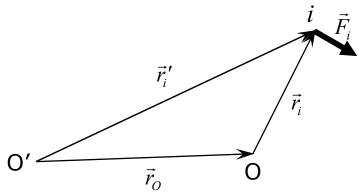
$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad és \quad \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$$

A merev test akkor és csak akkor van egyensúlyban, ha

- a rá ható erők eredője zérus ÉS van legalább egy olyan pontja, melyre nézve a nyomatékok összege is zérus. (A Budó könyv definíciója hibás!) vagy
- a nyomatékok összege a test bármely pontjára vonatkoztatva zérus. (Nincs benne a Budóban.)

(Kísérlet: rúd egyensúlya Film: 700/71***)***

Lássuk be, hogy a fenti két definíció ekvivalens/egyenértékű!



A 2. definíció szerint

O pontra: $\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$

O' pontra: $\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = 0$

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_O + \vec{r}_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_O \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$$

$$\vec{r}_O \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + 0 = 0$$

csak akkor teljesülhet, ha $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$, ami nem más, mint az 1. definíció.

A tömegközéppont megkeresése

(Kísérlet: tömegközéppont megkeresése)

Egy test súlypontja az a pont, melyen a test súlyának hatásvonala a test minden helyzetében átmegy, s amely pont ezért a test súlyának támadáspontjaként tekinthető. *Archimedes*

$$\vec{r}_{TKP} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

[a pontrendszerre vonatkozó impulzustétel:

a deriválás és az összegzés sorrendje felcserélhető

$$\sum_i \vec{F}_{külső,i} = \frac{d\sum_i \vec{I}_i}{dt} = \frac{d\left(\sum_i m_i \vec{v}_i\right)}{dt} = \frac{d\left(\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{d\sum_i m_i \vec{r}_i}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2\left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right)}{dt^2} =$$

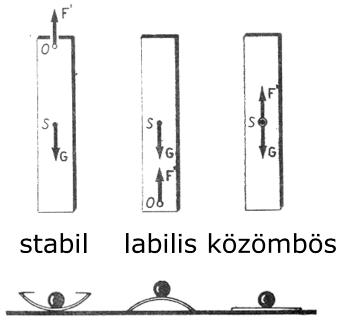
a tömegpontok tömege időben állandó

$$= \frac{\sum_j m_j}{\sum_j m_j} \frac{d^2\left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right)}{dt^2} = \sum_j m_j \frac{d^2\left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_j m_j}\right)}{dt^2} = \sum_j m_j \frac{d^2 \vec{r}_{TKP}}{dt^2} = m_{összes} \vec{a}_{TKP} \;]$$

bővítve a pontrendszer össztömegével

Ez pedig a tömegközéppont mozgásának tétele.

Az egyensúlyi helyzet típusai és jellemzésük



(Kísérlet: golyó óraüveggel)

Egy merev test, amelyre szabaderőként csak a saját súlya hat, akkor van stabilis (labilis) helyzetben, ha ebben a helyzetben a test súlypontja mélyebben (magasabban) van, mint bármely szomszédos helyzetben. (Stabil egyensúlyi helyzet esetén a tömegközéppontban támadó súly forgatónyomatéka olyan, hogy a testet az egyensúlyi helyzet felé téríti vissza.)

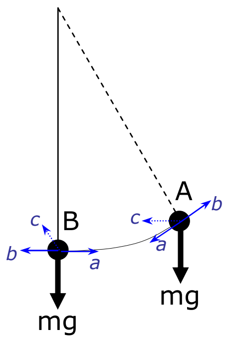
(Kísérlet: Jancsika a drótkötél táncos
FILM: Egyensúlyi helyzetek***)***

Dirichlet tétele: A mechanikai energia tételnek eleget tevő rendszerek akkor vannak stabilis egyensúlyi helyzetben, ha ebben a rendszer potenciális energiájának minimuma van.

A virtális munka elve

A legtöbb egyensúlyi problémánál az anyagi pontra, illetve a kiterjedt testre ható erők között a szabaderők mellett előre nem megadott kényszererők is fellépnek. Ilyen esetekben jelentősen egyszerűsíti a problémák kezelését, a virtuális munka elve.

Tekintsük a matematikai inga esetét:



Virtuális elmozdulás, δr: a kényszer által megengedett elemi elmozdulás (pl. *a, b, c*)

Virtuális munka, δW: a virtuális elmozdulás során végzett elemi munka

A szabaderő virtuális munkája $\delta W = \delta r \cdot mg \cdot \cos(\angle(\delta\vec{r}, m\vec{g}))$

az A pontban: $\delta W_a > 0$, $\delta W_b < 0$, $\delta W_c = 0$

a B pontban: $\delta W_a = 0$, $\delta W_b = 0$, $\delta W_c < 0$

A virtális munka elve:

Egy mechanikai rendszer akkor és csak akkor van egyensúlyban, ha a rendszer bármely virtuális elmozdulásánál a szabaderők összes munkája zérus, vagy negatív. *Bernoulli*

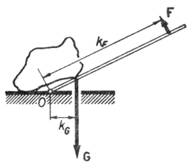
Egyszerű gépek 1.

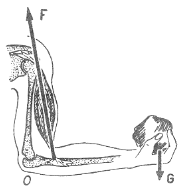
A munkagépek legegyszerűbb alaptípusai, melyek erőátviteli eszközök is. Segítségükkel erőt „megtakaríthatunk”, de munkát/energiát természetesen nem!

Az *erő* és a *teher* hatása alat álló rendszer egyensúlyának vizsgálátával az egyszerű gépek működése megérthető, leírható.

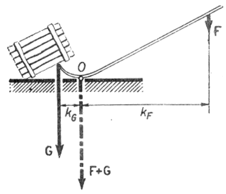
Emelő típusúak:

emelők





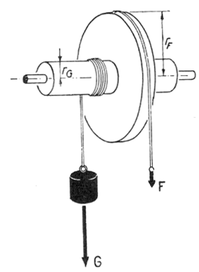
$$F \cdot k_F = G \cdot k_G$$



egykarú

kétkarú

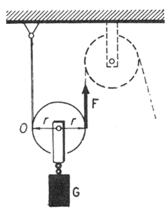
hengerkerék (kerekes kút)



$$F \cdot r_F = G \cdot r_G$$

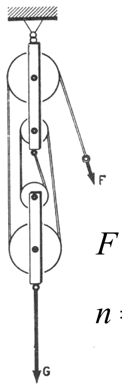
Egyszerű gépek 2.

Csigák, csigasorok



mozgócsiga

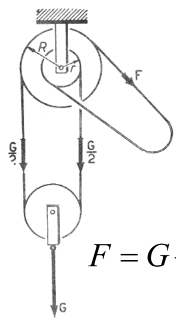
$$F = \frac{G}{2}$$



$$F = \frac{G}{2n}$$

$$n = 2$$

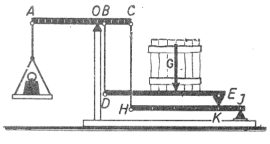
közönséges csigasor



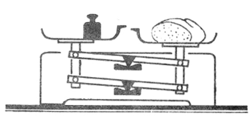
$$F = G\frac{R-r}{2R}$$

differenciális csigasor

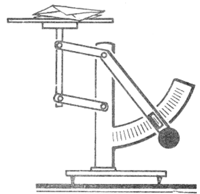
Mérlegek:



hídmérleg



asztali mérleg

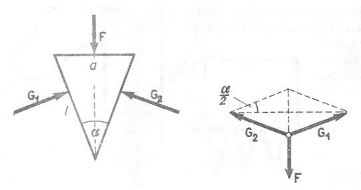


billenősúlyos mérleg

Egyszerű gépek 3.

Lejtő típusúak:

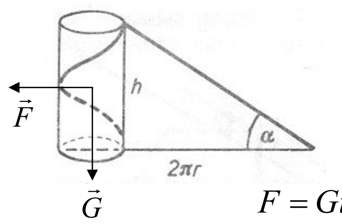
ék



$$F = 2G\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = G\frac{a}{l}$$

$$G = \left|\vec{G}_1\right| = \left|\vec{G}_2\right|$$

csavar



$$F = Gtg\alpha = G\frac{h}{2r\pi}$$

Rögzített tengely körül forgó merev test -> tehetetlenségi nyomaték

Az impulzusmomentumot eddig pontra vonatkoztatva ismertük. Ezt most meg szeretnénk fogalmazni tengelyre.

$$\vec{N} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \Longrightarrow N_z = \omega \sum_i m_i l_i^2 = \omega\Theta$$

(Kísérlet: babilon építőkészlet)

Θ kiszámítása néhány egyszerű esetben

$$\Theta = \sum_i m_i l_i^2 \Longrightarrow \Theta_{cső} = mr^2, \quad \Theta_{henger} = \frac{1}{2}mr^2$$

Steiner tétel

Ha ismerjük egy *m* tömegű test tehetetlenségi nyomatékát egy a tömegközéppontján átmenő tengelyre vonatkozóan, akkor egy ezzel párhuzamos, attól *s* távolságban levő másik tengelyre vonatkozóan:

$$\Theta = \Theta_{TKP} + ms^2$$

Henger/cső tiszta gördülése lejtőn

$$a_{TKP} = \frac{mgR^2 \sin\alpha}{\Theta}$$

(Kísérlet: tömör henger és cső gördülése lejtőn
Film: 700/75***)***

A rögzített *z* tengely körül forgó merev test mozgásegyenlete

$$M_z = \Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Megfelelések

Haladó mozgás *x* tengely mentén — Forgómozgás *z*-tengely körül

koordináta	x	szögelfordulás	φ
sebesség	v_x	szögsebesség	ω_z
gyorsulás	a_x	szöggyorsulás	β_z
tömeg	m	tehetetlenségi nyomaték	Θ
erő	F_x	formatónyomaték	M_z
impulzus	I_x	impulzusmomentum	N_z
mozgásegyenlet	$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$	mozgásegyenlet	$M_z = \Theta\frac{d^2\varphi}{dt^2}$
kinetikai energia	$\frac{1}{2}mv_x^2$	kinetikai energia	$\frac{1}{2}\Theta\omega_z^2$

Ingamozgás

Matematikai inga
Fizikai inga (redukált hossz)
Csavarási (torziós) inga

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

$$ha \sin\varphi \approx \varphi \quad (\varphi \leq 5^o)$$

Lineáris nyomaték törvény

⇩

$$\omega_{matematikai} = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \omega_{fizikai} = \sqrt{\frac{mgs}{\Theta}} \qquad \omega_{torziós} = \sqrt{\frac{D^*}{\Theta}}$$

Alkalmazások: reverziós inga, ingaóra, metronóm ...

(Kísérlet: állítható szögű, kétágú fizikai inga)

(Kísérlet: spirálrugós torziós inga hengerrel és csővel FILM: 700/76***)***

Szabad tengely

(Kísérlet: madzagra függesztett cső forgatása, mely nem merőlegesen van átfúrva)

A merev testnek általános esetben három, egymásra merőleges szabad tengelye van, nevezetesen a test tömegközéppontján átmenő három fő tehetetlenségi tengely.

A forgás stabilis a legnagyobb és a legkisebb, míg labilis a középső tehetetlenségi nyomatéknak megfelelő tengely körül.

Legstabilisabb a legnagyobb tehetetlenségi nyomatékhoz tartozó tengely körüli forgás.

(Kísérlet: felfüggesztett rúd és korong forgatása szimmetriatengelyük körül)

(Film: utalás a pörgettyűknél bemutatásra kerülő bicikli kerék giroszkópra)

Pörgettyűk

Pörgettyűnek nevezünk egy tetszőleges alakú és tömegeloszlású merev testet, ha egy rögzített, vagy rögzítettnek képzelhető pont körül foroghat.

Erőmentes

$$\mathbf{M} = 0 \Rightarrow \mathbf{N} = \acute{a}ll.$$

A súlypont körül forog.

a) a szimm. tengely helyzete nem változik

b) a szimm. tengely egy körkúpon mozog a térben állandó impulzustengely körül. (*nutáció*)

Súlyos

$$\mathbf{M} \neq 0$$

A szimm. tengely függőleges tengelyű körkúp palástja mentén mozog. (*precesszió*)

$$\omega_p = \frac{mgs}{N}$$

Giroszkopikus nyomaték:

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{N} \times \boldsymbol{\omega}_\mathbf{p}$$

(Filmek: bicaj kerék
FILM: MIT Physics Demo -- Bicycle Wheel Gyroscope
FILM: giroscope***)***

http://www.gyroscopes.org/