

Szegedi Tudományegyetem
Optikai és Kvantumelektronikai Tanszék

**Az okság elvének látszólagos sérülése
időfüggetlen lineáris rendszerben**

Szakedolgozat

készítette:

Ihász Ildikó

V. éves matematika-fizika szakos hallgató

Témavezető: Dr. Horváth Zoltán egyetemi adjunktus

Szeged

2000

Tartalomjegyzék

I. Bevezetés	3
II. Az időfüggetlen lineáris rendszerekről	6
Rendszerjellemező függvények	6
Az átmeneti függvény és a súlyfüggvény	7
Az átviteli függvény	8
A fázis- és csoportkésés	9
III. A rendszer leírása	12
A rendszer átviteli függvényének kiszámítása	13
A rendszer átviteli függvényének mérése szinuszos gerjesztéssel	14
A rendszer átviteli függvényének mérése impulzus gerjesztéssel	14
A rendszer fázis- és csoportkésése	19
IV. Jelterjedés	19
Mérési eredmények és a számítások összehasonlítása	21
A valódi késés és a csoportkésés összehasonlítása	24
V. A rendszer kauzalitása	30
Összefoglalás	34
Függelék	36
A. Az erősítő megépítésével és a méréssel kapcsolatos megjegyzések	36
B. A fázis és a csoportkésés kiszámítása	38
C. Impulzusválasz kiszámítása a különböző fokozatok esetén	39
Köszönetnyilvánítás	43
Irodalomjegyzék	44

I. Bevezetés

Az emberiséget régóta foglalkoztatja a jelek – lehetőleg minél gyorsabb és torzításmentes – továbbítása. Hullámok terjedésével kapcsolatban – a különféle szempontoknak jobban megfelelő – számos sebességet szokás definiálni [1–3]. Mi itt csak azokat említjük meg, amelyek a dolgozatban kifejtett témával kapcsolatba hozhatók:

- a *fázissebesség*, egy szinuszos hullám azonos fázisú felületeinek sebessége;
- a *csoportsebesség*, amellyel a hullámcsomag (impulzus) terjed;
- a *frontsebesség*, ami egy lökészerűen keltett zavar (mint amilyen egy jel hirtelen bekapcsolása is) terjedési sebessége.

Sommerfeld és Brillouin rámutattak [1], hogy bizonyos térrészben a csoportsebesség *szuperluminális* lehet, azaz nagyobb, mint c , a fény vákuumbeli sebessége. Garrett és McCumber részletes számításokkal megmutatták [4], hogy egy Gauss-impulzus diszperzióval rendelkező közegben szuperluminális csoportsebességgel haladhat, s mégis az eredeti Gauss alakhoz képest csak csekély mértékű alakváltozást szenved el. A jelenséget Chu és Wang pikoszekundumos lézer impulzusokra kísérletileg igazolta [5].

Ezen szerzők mind hangsúlyozzák, hogy a szuperluminális csoportsebesség nem áll ellentétben a relativisztikus (einsteini) oksággal, sőt megmutatták, hogy éppen az okság elve követeli meg, hogy diszperzív közegben a csoportsebesség a spektrum valamely részén szuperluminális legyen [6]. Számos fizikai jelenségnél felléphet szuperluminális jelterjedés. Ilyen például a kvantummechanikai alagúteffektus, és a hozzá hasonló elektromágneses hullámok terjedésével kapcsolatos klasszikus elektrodinamikai jelenségek. A jelenségek részletesebb tárgyalását, történeti és irodalmi áttekintését az érdeklődő olvasó az összefoglaló jellegű [7, 8] hivatkozásokban találja meg. A jelenségek közül mi csak néhányat sorolunk fel. Szuperluminális csoportsebességeket figyeltek meg például mikrohullámú impulzusok

terjedésénél [7, 8], optikai impulzus dielektrikum tükrökön való áthaladásánál [7, 8] és a geometriai optika által *tiltott* tartományokban terjedő fény esetén [7] (például elhajlás esetén). Az alagúteffektus klasszikusan *tiltott* jelenség. Az itt felsorolt jelenségek mindegyike kapcsolatba hozható az evanescens hullámokkal, így számos szerző hajlamos az evanescens hullámoknak tulajdonítani a szuperluminális jelterjedést. Azonban kimutatták, hogy az elhajlás a geometriai optika által *megengedett* térrészben is létrehozhat szuperluminális terjedést [9] (ilyen például a fókuszálás).

A szakirodalomban számos helyen lehet olvasni, hogy ha a csoportsebesség nagyobb, mint c vagy negatív, akkor nem tulajdonítható neki fizikai jelentés (például [10]). A fent említett kísérleti és elméleti tanulmányok világossá tették, hogy a szuperluminális csoportsebességek semmiképpen sem „fizikátlanok”, azaz pontos jelentésük lehet. Sommerfeld és Brillouin után még számos szerző kijelentette, hogy nem a csoportsebesség, hanem sokkal inkább a frontsebesség az, amely az einsteini kauzalitás miatt nem lehet c -nél nagyobb. Sajnos, egy lökészerű tulajdonság bevezetése, amely a kísérletileg is megfigyelhető frontként szolgálna, nehéz, és ezt még nem végezték el a mikrohullámú és az optikai rendszerekben. Ez egyeseket arra készítetett, hogy megkérdőjelezzék a frontsebesség újabb kísérletekhez való szükségességét.

Szakedolgozatomban bemutatok egy egyszerű lineáris erősítőt, amely látszólag az okság elvével (a kauzalitással) nem egyező impulzusterjedést mutat, s amely világosan illusztrálja a jelátvitel és a kauzalitás kérdéseit. Ennek az elektronikus rendszernek számos előnye van a mikrohullámú és az optikai rendszerekkel szemben:

- Az erősítő egyszerű elvű és olcsó elektronikai komponensekből állítható össze, így hallgatói laboratóriumban is tanulmányozható. A gyakorlati előnyeinek túl még lehetővé válik az okság elvének látszólag ellentmondó impulzusterjedés eredetének világosabb tanulmányozása, például az alagúteffektus és az anyagi közeg komplikációi nélkül.

- Az erősítőben lejátszódó jelenségek időskáláját hosszúnak lehet választani, ami lehetővé teszi az impulzusterjedés megfigyelését valós időben, illetve ami még ennél is fontosabb, lehetővé teszi a jelek lökészerű megváltozásaival (az ú.n. „frontokkal”) végzendő kísérleteket.
- Az erősítő karakteristikájában, alacsony frekvenciáknál, a térbeli terjedés miatt létrejövő késések elhanyagolhatóak, így a relativisztikus okság elve, amely az idődimenzió mellett tartalmaz legalább egy térdimenziót is, redukálható egy egyszerűbb problémára, amely csak idődimenziót tartalmaz.

A dolgozatban kifejtett téma alapgondolatát az irodalomjegyzék [11] cikkéből merítettük, de néhány dologban eltértünk tőle és a témát részletesebben fejtettük ki. Megváltoztattuk a rezonanciafrekvenciát, 50 Hz-ről 32 Hz-re, és az erősítést is csökkentettük a csoportkésés lényeges változása nélkül. Továbbá a méréseket összehasonlítottuk az elmélettel, valamint a csoportkésés bevezetésénél használt közelítést is összevetettük a numerikus eredményekkel. A dolgozat egyik fő célja az volt, hogy hallgatói laboratóriumi gyakorlatot dolgozzunk ki az időfüggetlen lineáris rendszerek vizsgálatára és a jelterjedés és a kauzalitás tanulmányozására.

II. Az időfüggetlen lineáris rendszerekről

Ebben a fejezetben az időfüggetlen és lineáris rendszerekről szóló azon ismereteket foglaljuk össze, amelyeket a dolgozatban felhasználunk. Az egyszerűség kedvéért csak olyan rendszereket vizsgálunk, melyeknek mind a bemenete, mind a kimenete egydimenziós, azaz mindkettő egyszerű skalár függvénnyel adható meg. A bevezetett fogalmak könnyen általánosíthatók több dimenziós bemenetek és kimenetek esetére [12].

Egy rendszer lineáris, ha érvényes rá a szuperpozíció elve. Ez azt jelenti, hogy ha valamely $u_1(t)$ és $u_2(t)$ gerjesztésekhez rendre $y_1(t)$ és $y_2(t)$ feleletek tartoznak, akkor $u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$ gerjesztésre a felelet $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$, ahol c_1 és c_2 tetszőleges állandók. Időfüggetlen a rendszer, ha a gerjesztés és a felelet kapcsolata nem függ attól az időponttól, amikor a gerjesztés hatni kezd. Ha tehát az $u(t)$ gerjesztéshez az $y(t)$ felelet tartozik, akkor az $u(t-\tau)$ gerjesztéshez $y(t-\tau)$ a felelet. Az időfüggetlen rendszert gyakran invariánsnak is nevezik.

Lineáris és invariáns rendszereket többnyire valamilyen lineáris konstans együtthatós differenciálegyenlet(rendszer) ír le [12, 13]. Ilyenek például az időben változatlan paraméterű lineáris elektromos hálózatok. A dolgozatban mi is egy ilyen áramkört tanulmányozunk.

Rendszerjellemező függvények

Lineáris, időfüggetlen rendszerek leírásánál fontos szerepet játszanak az úgynevezett *rendszerjellemező függvények*, melyen olyan függvényt értünk, aminek az ismeretében tetszőleges bemenetre megadható a válasz (nyugalomban lévő rendszer esetén¹). Nem

¹ Ha a rendszer nincs nyugalomban (azaz az x_0 kezdőállapota nem zérus), akkor a rendszerjellemező függvényekből kiszámítható válaszhoz bizonyos – stabil rendszerek esetén időben exponenciálisan csillapodó (tranziens) – folyamatok hozzáadódnak. Ezek azonban csak az x_0 kezdőállapottól és a rendszer jellemzőitől függenek, a gerjesztéstől nem.

lényegtelen további szempont, hogy a rendszerjellemező függvény mérésel ellenőrizhető legyen.

Az átmeneti függvény és a súlyfüggvény

Az időtartományban két fontos rendszerjellemező függvénynek van jelentősége:

- Az *átmeneti függvényen* a nyugalomban (egyensúlyban) lévő rendszernek az egységugrás függvény bemenetre adott válaszát értjük, ahol az egységugrás függvényt az

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ 1, & \text{különben} \end{cases} \quad (1)$$

egyenlet definiálja.

- A *súlyfüggvényen* a Dirac-féle deltafüggvény (impulzusfüggvény, $\delta(t)$) bemenetre adott feleletet értjük. A súlyfüggvényt ezért sokszor impulzusválasznak is szokták nevezni.

Az átmeneti függvény közvetlenül könnyebben meghatározható és talán szemléletesebb is, a súlyfüggvény azonban számítástechnikailag előnyösebb². Stabil rendszerek súlyfüggvénye a végtelenben eltűnik [13], míg az átmeneti függvényre ez nem feltétlenül igaz. Az általunk tanulmányozott rendszernek is éppen ilyen az átmeneti függvénye. Az ilyen végtelenben nem eltűnő átmeneti függvény a konvolúciós integrálok és Fourier-transzformáltak kiszámításánál nehezebben kezelhető. Például a Fourier-transzformáltjának FFT-vel való pontosabb kiszámításánál ablak függvényt kell használni.

A továbbiakban az átmeneti függvényt $k(t)$, a súlyfüggvényt $w(t)$ jelöli. Tudjuk, hogy a súlyfüggvény ismeretében tetszőleges $u(t)$ bemenetre az

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t - \tau) u(\tau) d\tau \quad (2)$$

² A (3) egyenletből látszik, hogy a felelet meghatározásához nem magára az átmeneti függvényre, hanem a deriváltjára van szükségünk. Mérésből meghatározott átmeneti függvény esetén ez még egy további numerikus deriválást igényel. Míg a (2) egyenlet szerint a súlyfüggvélynél ez a kellemetlenség nem lép fel.

képlet szolgáltatja a választ [12, 13]. Ebből kiolvasható a súlyfüggvény szemléletes jelentése: $w(t-\tau)$ megadja, hogy a válasz t pillanatbeli értékéhez az $u(\tau)$ gerjesztés milyen súllyal járul hozzá. A gyakorlatban $\delta(t)$ csak közelíthető, egy normált rövid impulzussal. A súlyfüggvény annál pontosabban írja le a véges hosszúságú impulzushoz tartozó feleletet, minél rövidebb a gerjesztő impulzus.

A $k(t)$ átmeneti függvény ismeretében tetszőleges $u(t)$ gerjesztéshez tartozó $y(t)$ felelet a Duhamel-tétellel [13] határozható meg:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k'(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau, \quad (3)$$

ahol a $k'(t)$ a $k(t)$ disztribúciós (általánosított) deriváltját jelöli. A (2) és a (3) egyenletekből látható, hogy a súlyfüggvény és az átmeneti függvény között a $w(t) = k'(t)$ kapcsolat áll fenn, melynek Fourier-transzformációjával a

$$W(\omega) = i\omega K(\omega) \quad (4)$$

frekvenciatartománybeli fontos összefüggés adódik, ahol $W(\omega)$ és $K(\omega)$ rendre a $w(t)$ és $k(t)$ függvények Fourier-transzformáltjai, ahol a Fourier-transzformációt a

$$W(\omega) = \mathbf{F}\{w(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) e^{-i\omega t} dt \quad (5)$$

formula definiálja [13]. A továbbiakban az \mathbf{F} szimbólum a Fourier-transzformációt jelöli.

Az átviteli függvény

További fontos rendszerjellemező függvény az (5) egyenlettel definiált $W(\omega)$ függvény, melyet *átviteli függvénynek* hívunk. Mivel a Fourier-transzformáció a konvolúciós integrált közönséges szorzatba viszi át, a (2) egyenlet a frekvenciatartományban az

$$Y(\omega) = W(\omega) U(\omega) \quad (6)$$

összefüggéshez vezet, ahol $Y(\omega)$ és $U(\omega)$ rendre az $y(t)$ és $u(t)$ Fourier-transzformáltjai. Ebből

inverz Fourier-transzformációval a következő fontos összefüggést kapjuk:

$$y(t) = \mathbf{F}^{-1}\{W(\omega) \cdot U(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) \cdot U(\omega) \cdot e^{i\omega t} dt, \quad (7)$$

azaz $W(\omega)$ is rendszerjellemező függvény, hiszen ismeretében a válasz kiszámítható. A (6) vagy a vele ekvivalens (7) egyenletről könnyen megmutatható, hogy ha $u(t) = u_0 \cos \omega_0 t$, akkor a hozzá tartozó válasz:

$$y(t) = A(\omega_0) \cdot u_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)), \quad (8)$$

ahol $A(\omega)$ és $\varphi(\omega)$ az átviteli függvény amplitúdója és fázisa, azaz

$$W(\omega) = A(\omega) \cdot e^{i\varphi(\omega)}. \quad (9)$$

A (8) egyenletről leolvasható az átviteli függvény szemléletes jelentése: megmutatja, hogy a rendszer hogyan változtatja meg a bemenetére kapcsolt harmonikus jel amplitúdóját és mennyivel tolja el a fázisát.

A fázis- és csoportkésés

Jelterjedés vizsgálatánál fontos szerepet játszik a fázis- és a csoportsebesség. Mivel az általunk vizsgált rendszerrel csak az időváltozó lép fel, a sebességek helyett az idődimenziójú *fázis-* és *csoportkésést* használjuk. Mint ahogy már az előbb említettük, a rendszer időfüggetlenségéből és linearitásából megmutatható, hogy ha a bemenetre szinuszos rezgést kapcsolunk, akkor a kimeneten is a bemenettel egyező frekvenciájú szinuszos rezgés lép fel. A kimenet és a bemenet közötti fáziskülönbségből származtatható a fáziskésés, a következőképpen: Legyen $u(t) = u_0 \cos \omega_0 t$ a bemenő jelünk. A rendszer felelete erre a gerjesztésre a (8) egyenlet szerint

$$y(t) = A(\omega_0) u_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)) = A(\omega_0) u_0 \cos(\omega_0(t - t_p)),$$

ahol t_p az ω_0 körfrekvenciához tartozó *fáziskésés*. Látható ebből, hogy a t_p fáziskésés egy adott ω körfrekvencián a következőképpen számítható ki:

$$t_p(\omega) = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega}. \quad (10)$$

Hasonlóan a fáziskéséshez, amely a fázis terjedési idejét adja, definiálható a csoportkésés is, amelyen egy impulzus (hullámcsoport vagy hullámcsomag) terjedési idejét értjük.

Ezen célból tekintsünk egy v_0 központi frekvenciájú impulzus áthaladását egy időfüggetlen lineáris rendszeren, azaz legyen a gerjesztés

$$u_r(t) = s(t) \cos \omega_0 t \quad (11)$$

alakú, ahol $s(t)$ a jel időbeli burkolója és $\omega_0 = 2\pi v_0$. Az elméleti számításoknál célszerű az $u_r(t)$ valós jel helyett a szokásos komplex írásmódot használni, azaz

$$u(t) = s(t) \cdot e^{i\omega_0 t}$$

bemenettel számolni. Nyilván $u_r(t) = \text{Re}[u(t)]$. A rendszer linearitása miatt hasonló összefüggés áll fenn a kimentekre is: $y_r(t) = \text{Re}[y(t)]$, ahol az $y_r(t)$ az $u_r(t)$, az $y(t)$ pedig az $u(t)$ bemenetekhez tartozó válaszok. Az átviteli függvény amplitúdó- és fáziskarakterisztikájának (melyeket a (9) egyenlet definiál) adott alakját beírva a (7) egyenletbe, kapjuk:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) U(\omega) e^{i(\omega t + \varphi(\omega))} d\omega = \frac{e^{i\omega_0 t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\mu + \omega_0) S(\mu) e^{i\varphi(\mu + \omega_0)} e^{i\mu t} d\mu. \quad (12)$$

Az utolsó átalakításnál bevezettük a $\mu = \omega - \omega_0$ központi körfrekvenciához viszonyított körfrekvenciát és kihasználtuk a Fourier-transzformált eltolási tulajdonságából következő $U(\omega) = \mathbf{F}\{u(t)\} = S(\omega - \omega_0)$ összefüggést, ahol $S(\omega) = \mathbf{F}\{s(t)\}$. Ez a lépés a numerikus számítások miatt is célszerű, mert így a vivőfrekvenciából származó időfüggés leválasztható, valamint a válasz burkolóját és az $\omega_0 t$ lineáris fázishoz viszonyított (relatív) fázisát könnyebben meg tudjuk határozni. Ugyanis a (12) egyenletet az

$$y(t) = q(t) e^{i\omega_0 t}$$

alakba írva, a válasz burkolóját $B(t) = |q(t)|$, fázisát pedig $\Phi(t) = \arg q(t)$ szolgáltatja. Az $y(t)$ komplex válasznak megfelelő valós válasz nyilván

$$y_r(t) = B(t) \cos[\omega_0 t + \Phi(t)]. \quad (13)$$

Ha a bemenő jel keskenysávú a rendszer amplitúdókarakterisztikájához képest, akkor a $\varphi(\omega)$ ω_0 körüli lineáris közelítésével, azaz $\varphi(\omega) = \varphi_0 + \varphi'(\omega_0) \cdot (\omega - \omega_0)$ felhasználásával a válasz közelítőleg:

$$y(t) \approx \frac{e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\mu + \omega_0) \cdot S(\mu) \cdot e^{i\mu[t + \varphi'(\omega_0)]} d\mu,$$

Kihasználva, hogy az $A(\omega)$ lassan változik, a jelet alkotó spektrális tartományon az integrálásnál állandónak tekinthető, továbbá bevezetve a

$$t_g(\omega) = -\varphi'(\omega) = -\frac{d\varphi}{d\omega} \quad (14)$$

definícióval egy idődimenziójú, *csoporkésésnek* nevezett mennyiséget, kapjuk, hogy

$$y(t) \approx A(\omega_0) \cdot e^{i[\omega_0 t_g + \varphi_0]} \cdot u(t - t_g).$$

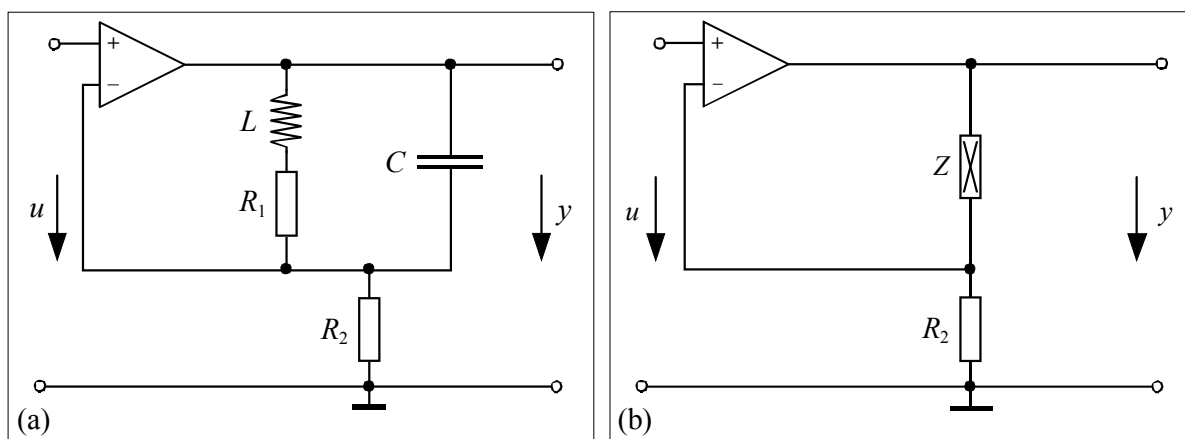
Az $y(t)$ komplex válasznak megfelelő valós válasz pedig

$$y_r(t) \approx A(\omega_0) \cdot s(t - t_g) \cos[\omega_0 t + \varphi_0], \quad (15)$$

amelyből látható, hogy a jel – a levezetésnél használt feltételek teljesülése esetén – a kimeneten t_g idővel később jelenik meg és – mivel $|y(t)| \approx A(\omega_0) \cdot s(t - t_g)$ – az alakja megegyezik, az $A(\omega_0)$ szorzótól eltekintve, a bemenő jel alakjával.

III. A rendszer leírása

A dolgozat hátralévő részében vizsgált lineáris időfüggetlen rendszer elvi kapcsolási rajza az 1. ábrán látható. Ez a rendszer elektronikai szempontból egy sáverősítő, amely egy rezgőkörrel (soros RLC körrel) az invertáló bemenetre visszacsatolt műveleti erősítőből áll. A számolásoknál az erősítő minden elektronikai komponensét ideálisnak, értékeiket időtől függetlenek tételeztük fel. A gyakorlati megvalósításnál a tekercs inductivitása $L = 154,71$ H, az ellenállások értékei $R_1 = 8,24$ k Ω és $R_2 = 29,9$ k Ω , illetve a kondenzátor kapacitása $C = 158,8$ nF volt. Az L inductivitás értékét azért választottuk ilyen nagynak, hogy a rezonanciafrekvencia alacsony legyen, és így a vizsgált frekvenciatartomány egyszerű műszerekkel is vizsgálható legyen. Természetesen egy ilyen nagy inductivitás már nem valósítható meg egy tekercs segítségével. Gyakorlati megvalósítása például egy girátorral lehetséges [14]. Az általunk alkalmazott megvalósítását az A Függelék tartalmazza.



1. ábra: A lineáris sáverősítő elvi kapcsolási rajza (a) és helyettesítési képe (b). A bemenetre kapcsolt feszültséget u , a kimeneten fellépő feszültséget y jelöli.

A rendszer átviteli függvényének kiszámítása

A soros RLC rezgőkört helyettesíthetjük egy Z impedanciával (1. ábra). Az áramkör működésének részletes leírása a szakirodalomban megtalálható [14], ezért csak vázlatosan ismertetjük. Ha az áramkör bemenetére U szinuszos feszültséget kapcsolunk, akkor a műveleti erősítő igyekszik a nem-invertáló és az invertáló bemenetein jelentkező feszültségeket kiegyenlíteni, ezért jó közelítéssel az invertáló bemeneten is az U szinuszos feszültség jelenik meg. A rendszer időfüggetlensége és linearitása miatt a kimeneten szinuszos feszültség jelentkezik, jelölje ezt Y . Az U és az Y feszültségek között a feszültségosztásnak megfelelő

$$U = \frac{Y}{R_2 + Z} R_2$$

kapcsolat áll fenn, amelyből

$$Y(\omega) = \left(1 + \frac{Z(\omega)}{R_2}\right) U(\omega) = W(\omega) U(\omega)$$

kapcsolat adódik. Az átviteli függvény harmonikus gerjesztésekre vonatkozó jelentése szerint ((6) egyenlet) a zárójelben lévő kifejezés éppen az átviteli függvény. A komplex impedancia

$Z(\omega) = \left[(R_1 + iL\omega)^{-1} + iC\omega \right]^{-1}$ értékét beírva kapjuk az átviteli függvényt a frekvencia függvényében:

$$W(\omega) = 1 + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{(R_1 + iL\omega)^{-1} + iC\omega}.$$

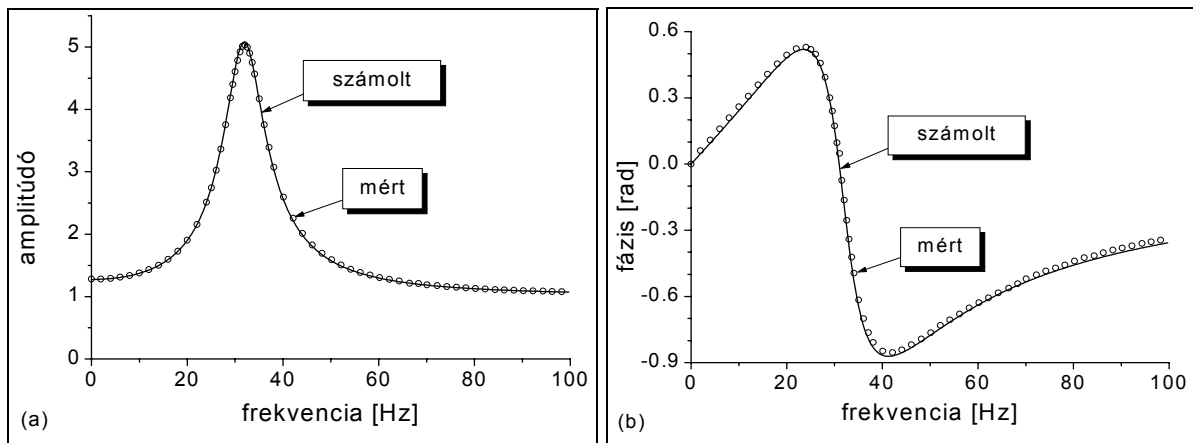
A későbbi számolások miatt célszerű bevezetni a $\beta = R_1/(2L)$ csillapodási tényezőt, a rezgőkör $\omega_s = 1/\sqrt{LC}$ sajátkörfrekvenciáját és a $T = R_2 C$ időállandót. Így az átviteli függvény a

$$W(\omega) = 1 + \frac{1}{T} \frac{2\beta + i\omega}{\omega_s^2 - \omega^2 + i2\beta\omega} \quad (16)$$

alakban áll elő. Az induktivitás, a kapacitás és az ellenállások konkrét értékeit felhasználva $\beta = 26.63 \text{ Hz}$, $\omega_s = 201.75 \text{ Hz}$ ($\nu_s = \omega_s/2\pi = 32.11 \text{ Hz}$) és $T = 4.75 \text{ ms}$.

A rendszer átviteli függvényének mérése szinuszos gerjesztéssel

Az átviteli függvényt kétféleképpen mértük meg. Az első módszernél a bemenetre szinuszos gerjesztést kapcsoltunk és mértük a rendszer szinuszos válaszát. A kimenő és a bemenő jelek amplitúdóinak hányadosa a rendszer amplitúdókarakterisztikáját (az átviteli függvény $A(\omega)$ amplitúdóját), fázisállandójuk különbsége pedig a fáziskarakterisztikáját (az átviteli függvény $\varphi(\omega)$ fázisát) adja meg. Az amplitúdókat és a fázisállandókat a mért görbékre szinuszos függvény illesztésével határoztuk meg. A gerjesztést és a hozzá tartozó választ egy 16 bites AD konverterrel mértük (A Függelék).



2. ábra: Az átviteli függvény amplitúdója (a) és fázisa (b) a frekvencia függvényében. A mért értékeket a körök, a számolt értékeket a folytonos görbe szemlélteti. A mérésnél harmonikus gerjesztést használtunk.

A harmonikus gerjesztést egy HAMEG HM 8030-5 jelgenerátorral állítottuk elő. A mérés során a frekvenciát a 0–24 Hz és a 38–100 Hz intervallumban 2 Hz-es, 24–28 Hz és a 34–38 Hz intervallumban 1 Hz-es, a 29–34 Hz intervallumban pedig fél Hz-es lépésközzel változtattuk, tehát a rezonancia környezetében sűrűbben mértünk.

Az amplitúdó- és a fáziskarakterisztika a frekvencia függvényében az 2. ábrán látható. A (16) egyenletből számított értékeket a folytonos görbével, a mért értékeket pedig kis körökkel

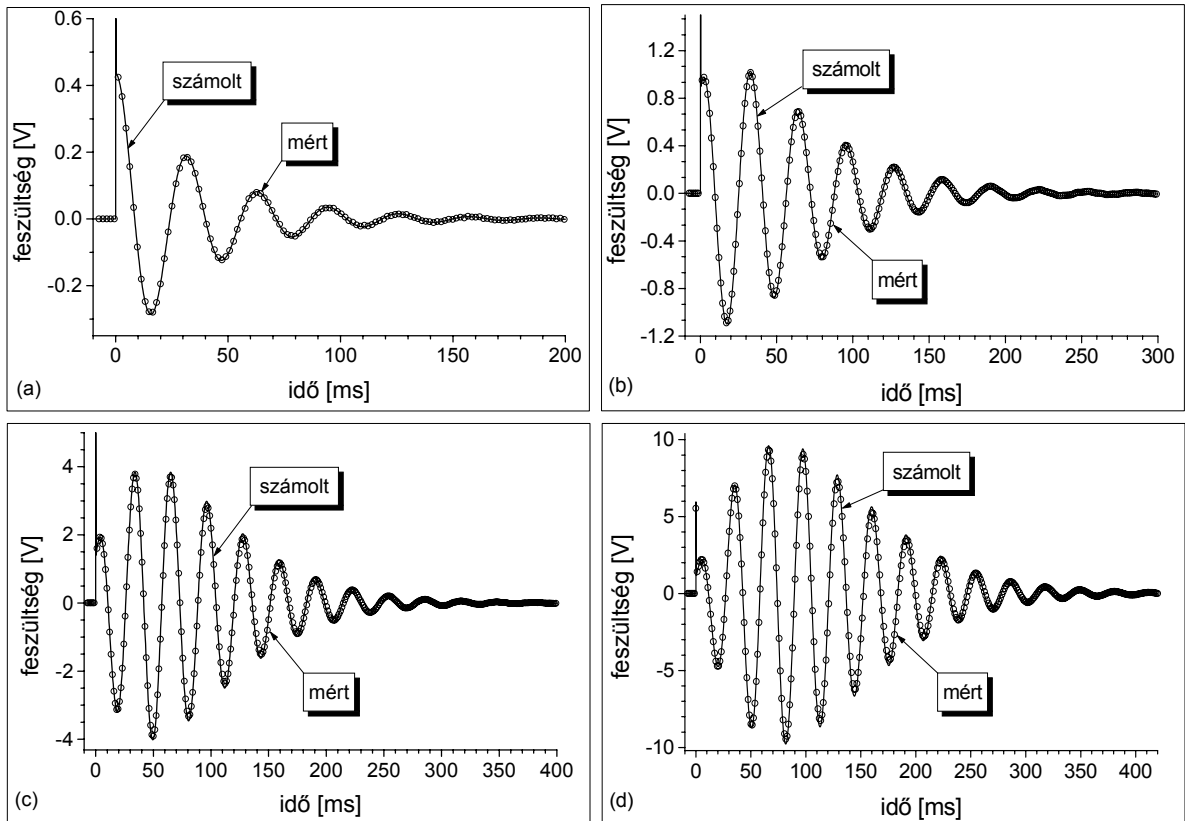
ábrázoltuk. Látható, hogy a mérés és számolás között jó az egyezés.

A rendszer átviteli függvényének mérése impulzus gerjesztéssel

A második módszernél a bemenetre impulzusgerjesztést (közelítő Dirac-delta függvényt) kapcsoltunk és mértük a rendszer válaszát (a közelítő impulzusválaszt). A kimeneten mért válasz Fourier-transzformáltja a rendszer (közelítő) átviteli függvénye. A Fourier-transzformáltat FFT-vel határoztuk meg. Az átviteli függvény abszolútértéke a rendszer amplitúdó-karakterisztikáját, argumentuma pedig a fáziskarakterisztikáját adja.

Egyetlen erősítő által létrehozott fázis- és csoportkésés túlságosan kicsi ahhoz, hogy a jelterjedést szemléltető ábrákon szemmel jól érzékelhető legyen. Ezért a hatás növelése érdekében további három erősítőt kapcsoltunk sorba az eredeti erősítőnkkel. Egy ilyen két-, három- és négyelemű erősítőlánccal a fázis- és a csoportkésést, a két-, három- illetve négyszeresére tudjuk növelni, s ebből kifolyólag az grafikonokon sokkal könnyebben észlelhető a bemenethez viszonyított késés vagy sietés.

Egy A_0 amplitúdójú és Δt hosszúságú négyszögimpulzust alkalmaztunk gerjesztésként, ami tulajdonképpen az $A_0 \Delta t \delta(t)$ függvény közelítésének tekinthető. Erre a függvényre adott választ (közelítőleg $A_0 \Delta t w(t)$ -t) mértük a rendszer kimenetén. Azaz a mért görbét elosztva $A_0 \Delta t$ -vel, éppen az impulzusválaszt (a súlyfüggvényt) kapjuk, feltéve, hogy a gerjesztő impulzus jó közelítése a Dirac-deltának. Egy, kettő és három erősítőből álló rendszer esetén az $A_0 = 8.458$ V, négy sorba kapcsolt erősítőnél pedig $A_0 = 4.943$ V, és mind a négy esetben a $\Delta t = 244.141$ μ s volt.



3. ábra: Az A_0 amplitúdójú $\Delta t = 244.141 \mu\text{s}$ hosszúságú négyszögimpulzusra (közelítőleg $A_0 \Delta t \cdot \delta(t)$ gerjesztésre) adott mért válasz (kis körök), az egy (a), kettő (b), három (c) és négy (d) sorba kapcsolt erősítőtől álló rendszer esetén. A folytonos vonal pedig az (a-d) eseteknek megfelelő számú sorba kötött erősítőkből álló teljes rendszer súlyfüggvényének $A_0 \Delta t$ -szeresét ($A_0 \Delta t \cdot w(t) - t$) mutatja.

A mérés eredménye és az elméleti impulzusválasz összehasonlítása a 3. ábrán látható egy, kettő, három és négy sorba kapcsolt erősítő esetén. Később látni fogjuk, hogy az elméleti impulzusválaszokban fellép egy Dirac-delta (lásd a (17) egyenlet), ezt az ábrázolásnál egy Δt hosszúságú és $1/\Delta t$ amplitúdójú (tehát normált) négyszögimpulzussal helyettesítettük. A 3. ábrán a függőleges tengelyeket úgy skáláztuk, hogy a rezgés részletei jól láthatóak legyenek és ezért a súlyfüggvényben lévő Dirac-deltának megfelelő “tüske” csak az utolsó, (c) esetben jelenik meg teljes egészében, a többinél pedig nem fér ki. A jól láthatóság kedvéért, a mért impulzusválaszt jelölő köröket ritkábban tüntettük fel, mint valójában azt mértük.

Az elméleti impulzusválaszokat a következőképpen kaphatjuk meg. Jelöljük az n sorba kapcsolt azonos erősítőtől álló rendszer súlyfüggvényét $w_n(t)$ -vel. Mivel sorba kapcsolás esetén az átviteli függvények összeszorzódnak, ezért $w_n(t) = \mathbf{F}^{-1} \{ W^n(\omega) \}$, ahol $W(\omega)$ egy

erősítő átviteli függvénye. A (16) egyenlet szerint $W(\omega) = 1 + H(\omega)/T$ alakú, ahol

$$H(\omega) = \frac{2\beta + i\omega}{\omega_s^2 - \omega^2 + i2\beta\omega}.$$

Mivel $W^n(\omega) = \left(1 + \frac{H(\omega)}{T}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{H^k(\omega)}{T^k}$ és az inverz Fourier-transzformáció

lineáris, ezért az n sorba kapcsolt azonos erősítőkből álló rendszer súlyfüggvénye

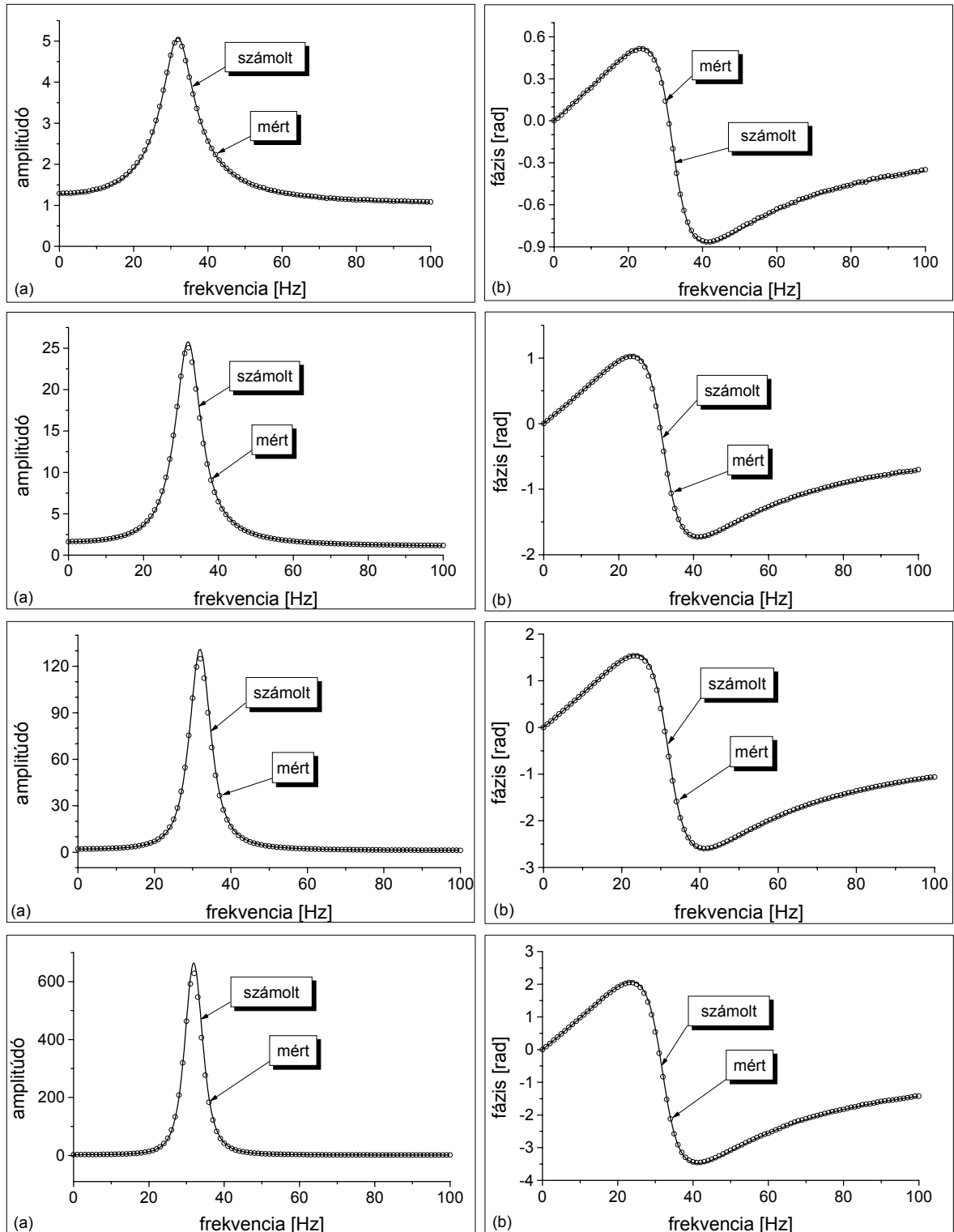
$$w_n(t) = \delta(t) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{h_k(t)}{T^k}, \quad (17)$$

ahol $\binom{n}{k}$ a binomiális együtthatók és a $h_k(t) = \mathbf{F}^{-1}\{H^k(\omega)\}$. A $k = 1, 2, 3, 4$ értékekre a

$h_k(t)$ függvényeket a C Függelékben számítottuk ki.

Az átmeneti függvény amplitúdó- és fáziskarakterisztikája a 4. ábrán látható a frekvencia függvényében. A folytonos görbék a (16) egyenletből számolt elméleti, a kis körök pedig a mért impulzusválaszból FFT-vel kapott kísérleti értékeket szemléltetik. Mint korábban már említettük, a (teljes) rendszert alkotó sorba kötött erősítők számának megfelelően, négy esetet vizsgáltunk meg. Mind a négy esetben a számított és a mért értékek, hasonlóan a harmonikus gerjesztéshez, jó egyezést mutatnak. Az elvi rezonancia görbéknek a maximuma 31.904 Hz-nél van, és itt az erősítés (amplitúdó) egy erősítőre 5,069, n erősítőből álló rendszer esetén pedig ennek az n -edik hatványa.

A második (egylövéses) módszer sokkal könnyebben kivitelezhető, mint az első módszer, mert itt az átviteli függvény egy méréssel meghatározható, míg a harmonikus gerjesztés módszerénél minden frekvencián külön mérést kellett végezni.



4. ábra: Sorba kötött (azonos) erősítőkből álló rendszer átviteli függvényének amplitúdója (a) és fázisa (b) a frekvencia függvényében. A sorba kötött erősítők száma felülről lefelé rendre egy, kettő, három ill. négy. A mért értékeket a körök, a számolt értékeket a folytonos görbe szemlélteti. A mérésnél impulzusgerjesztést használtunk.

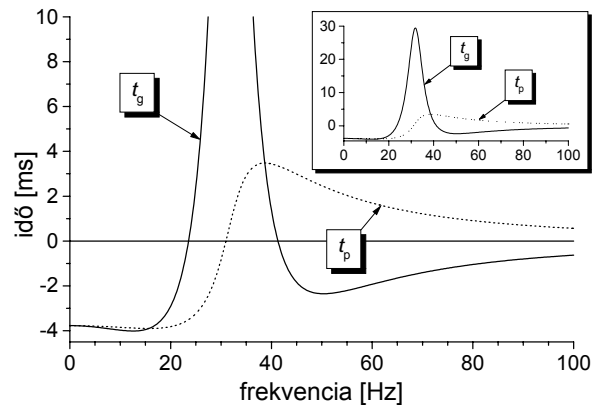
Kettő vagy ennél több erősítő esetén, a nagy erősítés miatt, a rezonancia környékén nem célszerű a harmonikus gerjesztés módszerét használni, mert a bemenet amplitúdóját kicsinek (négy fokozat esetén például mV-os nagyságrendűnek) kell választani ahhoz, hogy a válasz a műveleti erősítő működési tartományába essen.

A rendszer fázis- és csoportkésése

Az átviteli függvény ismeretében a fázis- és a csoportkésés kiszámítható (lásd (10) és (14) egyenleteket). A fázis- és a csoportkésés explicit alakja az itt kifejtett téma szempontjából nem túlságosan lényeges, ezért

kiszámításukat a B Függelékben ismertetjük. Az 5. ábrán, egy erősítő fázis- illetve csoportkésését rajzoltuk fel. Több erősítőből álló rendszer esetén a fázis- és csoportkésések értékei a megfelelő fokozatok számával

szorozódnak. Jól látható, hogy mindkét késés pozitív és negatív értékeket is felvesz. A 0 ms időt egy vízszintes vonal jelöli. Ezen



5. ábra: Egy erősítő fázis- és csoportkésése a frekvencia függvényében. A függőleges tengelyt úgy skáláztuk, hogy a számunkra lényeges negatív értékek jól láthatóak legyenek. A függvények teljes menetét a beszúrt ábra mutatja.

vízszintes vonal alatt, azaz a negatív értékeknél, siet a jelünk, míg a vonal felett, azaz a pozitív értékekre, a jel késik. Például, 15 Hz-en a kimenő jel 4 ms-mal (négy erősítő esetén $4 \cdot 4 \text{ ms} = 16 \text{ ms}$ -mal) előbb jelenik meg, mint a bemenet. A fáziskésés 30,971 Hz frekvenciánál zérus, míg a csoportkésés 23,559 Hz-nél és 41,303 Hz-nél nulla és a kettő között pozitív, másutt pedig negatív.

IV. Jelterjedés

Az eddigiek során láttuk, hogy rendszerünk csoportkésleltetése negatív értékeket is felvesz. Ez a tény azt sugallja, hogy megfelelő vivőfrekvenciájú impulzust kapcsolva a bemenetre, a válasz burkolójának maximuma megelőzheti a gerjesztés burkolójának maximumát, és ha a csoportkésés származtatásánál használt feltételek teljesülnek, akkor a jel az erősítéstől eltekintve torzításmentesen, a bemenetet *megelőzve* halad át a rendszeren. A következőkben ezt a kérdéskört vizsgáljuk meg elméleti és kísérleti szempontból is.

Gerjesztésnek Gauss-görbével burkolt, ν_0 központi frekvenciájú impulzust választottunk:

$$u(t) = s(t) \cos(2\pi\nu_0 t),$$

ahol $s(t) = A_0 e^{-4\ln 2 \left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$ a jel burkolója és τ a jel időbeli hossza (a burkoló Gauss-görbe félértékszélessége). A (12) egyenletben szereplő $S(\omega)$, ennek megfelelően esetünkben:

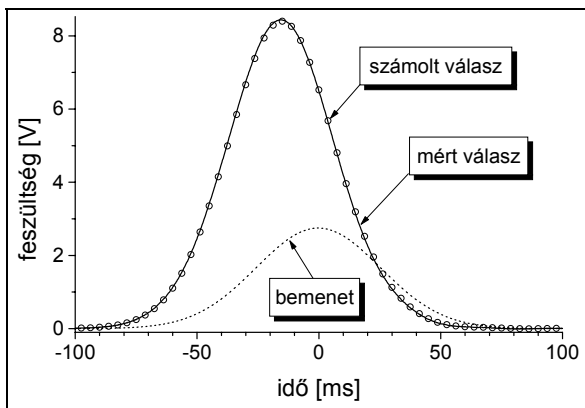
$$S(\omega) = \mathbf{F}\{s(t)\} = A_0 \tau \sqrt{\frac{\pi}{4\ln 2}} e^{-\frac{\tau^2 \omega^2}{16\ln 2}}$$

A kísérleteknél az idő nullpontját úgy választottuk, hogy a Gauss-görbe csúcsa, azaz a bemenet maximuma, $t=0$ -nál legyen. Így könnyű megállapítani a kimenő jelnek a bemenethez viszonyított késését illetve sietését. A bemenő jelet egy 14 bites kártyával (DA konverterrel) állítottuk elő. Az A_0 amplitúdót egy feszültségosztóval szabályoztuk, annak érdekében, hogy a válasz feszültsége a műveleti erősítő és a jelet regisztráló AD konverter működési tartományába (azaz [-10 V, 10 V] intervallumba) essen. A mérés során 4096 pontban mintavételeztünk és a mintavételezési időköz 244.141 μs volt. A vizsgált rendszer, a jel vivőfrekvenciájától függően, kettő vagy négy sorba kapcsolt erősítőből állt. Négy erősítőt használtunk, ha a vivőfrekvenciához tartozó csoportkésés negatív, és két erősítőt, amikor a csoportkésés pozitív. Ugyanis az utóbbi estnél – a rezonancia környékén – sokkal nagyobb az erősítés és a csoportkésés értéke is, így már két fokozat hatása is könnyen szemléltethető az ábrákon.

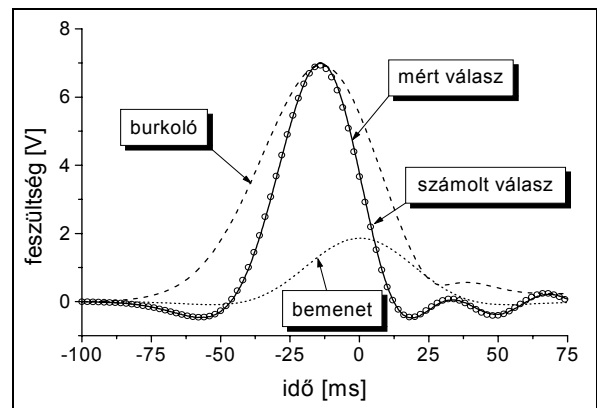
Mérési eredmények és a számítások összehasonlítása

A soron következő ábrák a mérési eredményeknek az elméleti értékekkel való összehasonlítását szemléltetik. A válasz számolt értékeit a (12) egyenletből nyertük numerikus integrálással. A numerikus számolásoknál nem $-\infty$ -tól $+\infty$ -ig integráltunk, hanem egy alkalmasan választott frekvenciaablakban.

Először vizsgáljunk olyan bemeneteket, melyeknek vivőfrekvenciáján a csoportkésés negatív. A 6. ábrán a $\nu_0 = 0$ Hz vivőfrekvenciájú és $\tau = 60$ ms hosszúságú gerjesztés és a rá adott válasz látható. A kimenő jel maximuma időben 15,231 ms-mal előbb jelentkezik, mint a bemenő jelé. Ez jó egyezést mutat a 0 Hz vivőfrekvenciához tartozó csoportkésés $-15,095$ ms értékével.



6. ábra: Egy 60 ms félértékszélességű Gauss-görbe alakú gerjesztésre (pontozott vonal) adott válasz az idő függvényében (folytonos vonal). A kis körök az elméletből számolt választ jelölik.

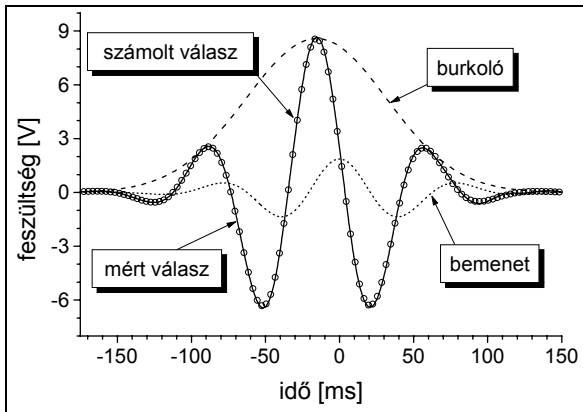


7. ábra: Egy 6 Hz frekvenciájú, 60 ms félértékszélességű Gauss-görbével burkolt gerjesztésre (pontozott vonal) adott válasz az idő függvényében (folytonos vonal). A kis körök a számolt választ jelölik. A válasz számolt burkolóját a szaggatott vonal mutatja.

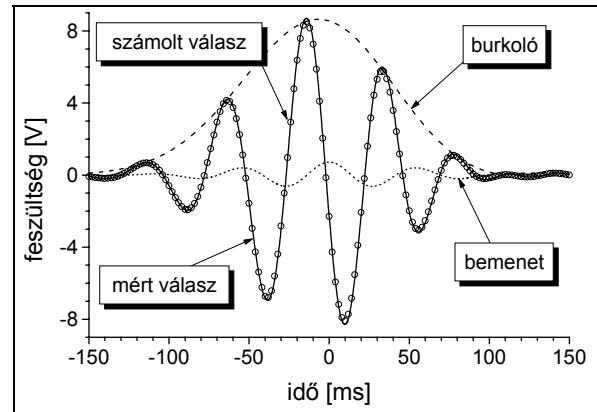
A 7. ábrán egy 6 Hz frekvenciájú, 60 ms hosszú Gauss-görbével burkolt gerjesztést és a hozzá tartozó választ ábráztuk. Az előző esethez hasonlóan a kimenet itt is siet, méghozzá 13,735 ms-mal a bemenethez képest. Ehhez a frekvenciához tartozó csoportkésés $-15,452$ ms.

A 8. ábrán egy 12 Hz vivőfrekvenciájú és 120 ms hosszúságú gerjesztés és a rá adott válasz látható. A kimenő jel burkolójának maximuma időben 15,488 ms-mal előbb jelentkezik, mint a bemenő jelé, ami jó egyezést mutat a 12 Hz vivőfrekvenciához tartozó $-16,044$ ms

csoportkéséssel. A 9. ábrán a 18 Hz frekvenciájú, 120 ms hosszú Gauss-görbével burkolt bemenetet és a hozzá tartozó feleletet ábrázoltuk. A 12 Hz-es esethez hasonlóan a kimenet itt is siet 6,640 ms-mal a bemenethez képest. Ehhez a frekvenciához -14,227 ms csoportkésés tartozik.

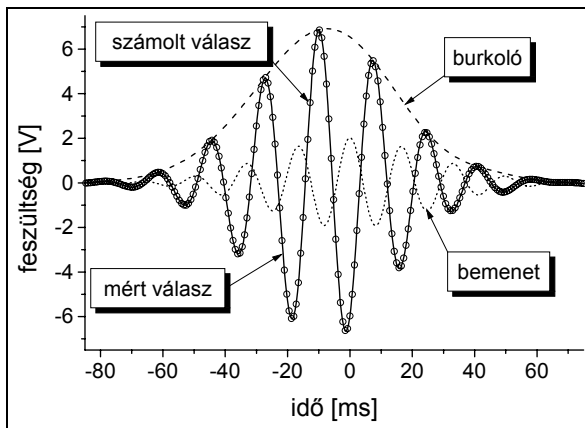


8. ábra: Egy 12 Hz frekvenciájú, 120 ms fél-értékszélességű Gauss-görbével burkolt gerjesztésre (pontozott vonal) adott válasz az idő függvényében (folytonos vonal). A kis körök a számolt választ jelölik. A válasz számolt burkolóját a szaggatott vonal mutatja.

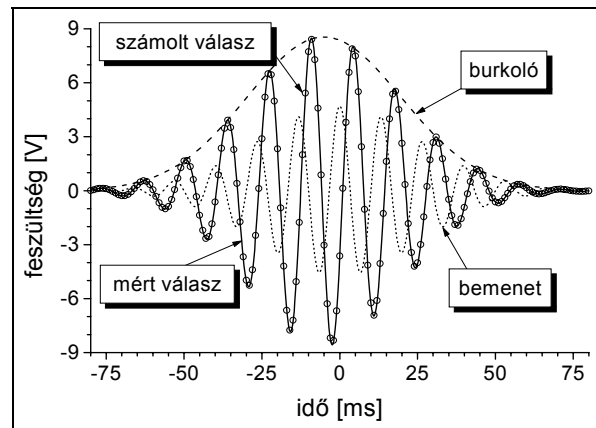


9. ábra: Egy 18 Hz frekvenciájú, 120 ms fél-értékszélességű Gauss-görbével burkolt gerjesztésre (pontozott vonal) adott válasz az idő függvényében (folytonos vonal). A kis körök a számolt választ jelölik. A válasz számolt burkolóját a szaggatott vonal mutatja.

A 10. ábrán egy 60 Hz vivőfrekvenciájú és 60 ms hosszúságú gerjesztés és a rá adott válasz látható. A kimenő jel burkolójának maximuma időben 7,371 ms-mal előbb jelentkezik, mint a bemenő jelé. Ez jó egyezést mutat a 60 Hz vivőfrekvenciához tartozó csoportkésés -7,714 ms értékével. A 11. ábrán egy 75 Hz frekvenciájú, 60 ms hosszú Gauss-görbével burkolt gerjesztést és a hozzá tartozó választ ábrázoltuk. Az előbbi esethez hasonlóan a kimenet itt is siet 5,104 ms-mal a bemenethez képest. Ehhez a frekvenciához -4,842 ms. csoportkésés tartozik.



10. ábra: Egy 60 Hz frekvenciájú, 60 ms hosszú impulzusra (pontozott vonal) adott válasz az idő függvényében (folytonos vonal). A kis körök a számolt választ jelölik. A válasz számolt burkolóját a szaggatott vonal mutatja.

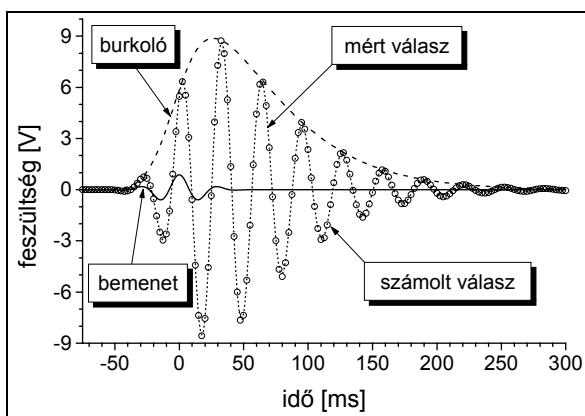


11. ábra: Egy 75 Hz frekvenciájú, 60 ms hosszú impulzusra (pontozott vonal) adott válasz az idő függvényében (folytonos vonal). A kis körök a számolt választ jelölik. A válasz számolt burkolóját a szaggatott vonal mutatja.

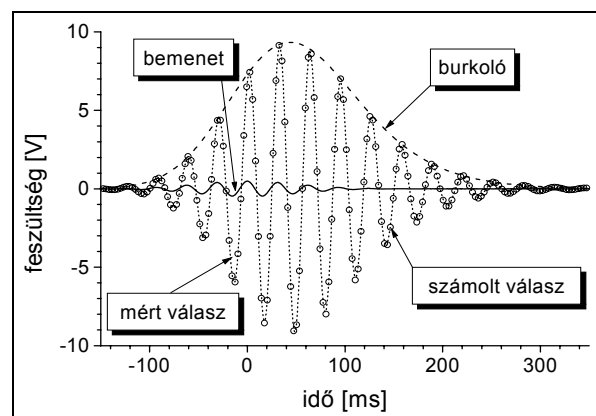
Most tekintsünk olyan gerjesztéseket,

melyeknek a központi frekvenciáján pozitív a csoportkésés. Amint azt már említettük, a csoportkésés pozitív értékei nagyok, ezért a szemléltetéshez elegendő két erősítőt sorba kötni.

A 12. ábrán egy 32 Hz vivőfrekvenciájú és 40 ms hosszúságú gerjesztés és a rá adott válasz látható. A kimenő jel burkolójának maximuma időben 26,474 ms-mal később jelentkezik, mint a bemenő jelé. A 13. ábrán a 32 Hz frekvenciájú, 120 ms hosszú Gauss-görbével burkolt gerjesztést és a hozzá tartozó választ ábrázoltuk. Az előbbi esethez hasonlóan a kimenet itt is késik 43,771 ms-mal



12. ábra: Egy 32 Hz frekvenciájú, 40 ms hosszú gerjesztésre (pontozott vonal) adott válasz az idő függvényében (folytonos vonal). A kis körök a számolt választ jelölik. A válasz számolt burkolóját a szaggatott vonal mutatja.



13. ábra: Egy 32 Hz frekvenciájú, 120 ms hosszú bemenetre (pontozott vonal) adott felelet az idő függvényében (folytonos vonal). A kis körök a számolt választ jelölik. A válasz számolt burkolóját a szaggatott vonal mutatja.

a bemenethez képest. Mindkét esetben, a 32 Hz vivőfrekvenciához tartozó csoportkésés 58,771 ms. A jel késése és a csoportkésés között jelentős az eltérés. Az eltérés okára a későbbiekben – csoportkésés származtatásánál használt közelítés és a numerikus számolás összehasonlításánál – térünk ki.

A valódi késés és a csoportkésés összehasonlítása

A fejezetben eddig a (16) egyenlet alapján számított jeleket hasonlítottuk össze mérési eredményeinkkel. Elég jó egyezést láttunk a kettő között. A jel sietése vagy késése – a várakozásnak megfelelően – a csoportkésés előjelével összhangban volt. Azaz azokon a vivőfrekvenciákon, ahol a csoportkésés negatív volt, a jel sietett, és ahol pozitív volt, ott késett. Bár a jel valódi késése és a csoportkésés értéke között kisebb–nagyobb eltérések mutatkoztak. A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy mikor írja le pontosabban a jel késését a csoportkésés. Ezért a csoportkésés származtatásánál kapott közelítő (15) egyenletből adódó és a pontos (13) egyenletből numerikus számolással nyert eredményeket vetjük össze. A valódi késés és a csoportkésés jobb összehasonlíthatósága kedvéért a két válasz (a közelítő és a pontos) burkolóját is berajzoljuk majd az ábrákra.

Három vivőfrekvenciát és minden frekvencián két különböző hosszúságú bemenetet (azaz hat esetet) vizsgáltunk. Egy adott vivőfrekvencián az első impulzus hosszát és amplitúdóját a már mért esetekkel azonosnak választottuk, hogy a meglévő mérési eredmények a közelítéssel összehasonlíthatóak legyenek. A második impulzus amplitúdója az elsővel megegyező volt, viszont a hosszát nagyobbak választottuk, hogy a sávszélessége keskenyebb legyen és így a közelítés feltételei jobban teljesüljenek.

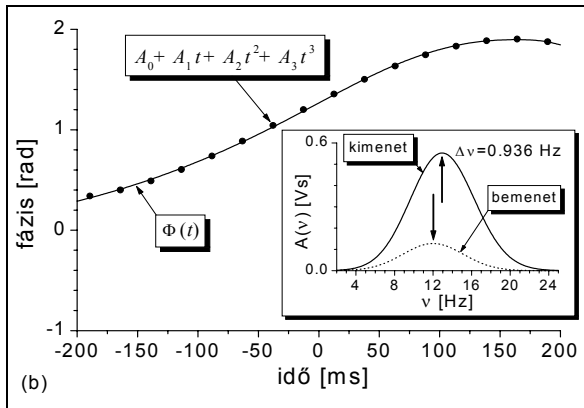
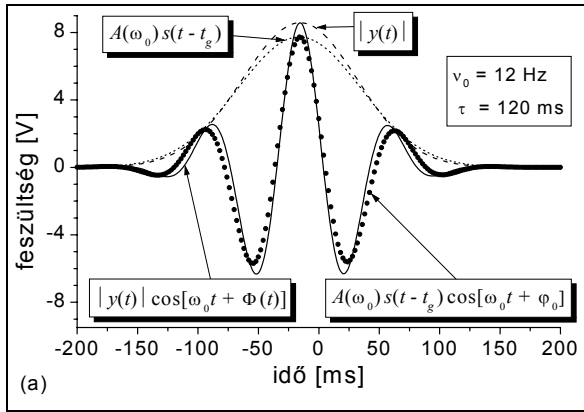
A 14. és 15. ábrán egy 12 Hz frekvenciájú, az ábrák sorrendjének megfelelően 120 ms és 200 ms hosszúságú Gauss-impulzusokra adott – a numerikus számolásból adódó – válasz³ és

³ A továbbiakban a numerikus számolásból adódó választ *pontos* válasznak, a csoportkésés származtatásánál

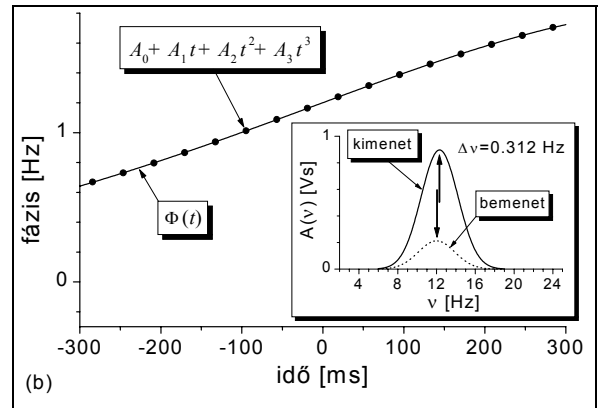
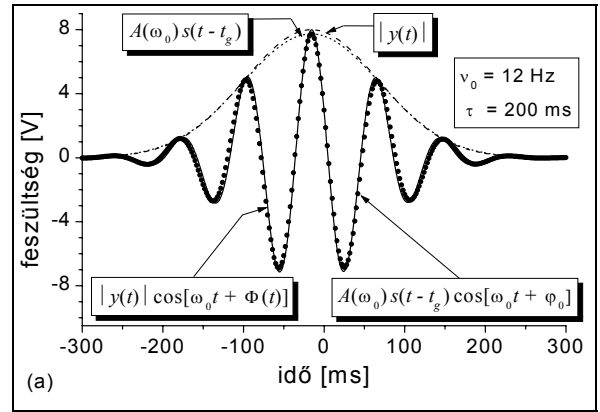
ennek analitikus közelítésének összehasonlítása látható ((a) rész). A közelítő válasz burkolóját ($A(\omega_0) s(t - t_g) - t$) szaggatott vonal, a pontos válasz burkolóját ($|y(t)| - t$) pedig a pontozott vonal jelöli. Ezek segítségével jól összehasonlítható a kétféle válaszhoz tartozó késés illetve sietés. Az ábrák (b) része a pontos válasz fázisának a $\omega_0 t$ lineáris fázistól való eltérését ($\Phi(t) - t$) mutatja (lásd a (13) egyenletet). A beszúrt ábrák a bemenet és a kimenet (amplitúdó) spektrumát szemléltetik A nyilak a spektrum maximumaira mutatnak. Az átviteli függvény jelentése szerint, a kimenet spektrumát, a bemenet spektrumának és az átviteli függvény amplitúdójának szorzata adja meg. Mivel esetünkben az átviteli függvény amplitúdója a jelet alkotó spektrális tartományon monoton növekedő, a kimenet spektruma kissé megváltozik, maximuma pozitív irányba tolódik el. Az eltolódás a kisebb sáv szélesség esetén kisebb. A közelítő és a pontos jel grafikonjait jobban megnézve (az ábrák (a) részén) észrevehető, hogy a két rezgés frekvenciája kissé eltér egymástól, még hozzá a pontos jel frekvenciája a nagyobb. Ez a kismértékű frekvenciaváltozás éppen a kimenet spektrumának maximum eltolódásával magyarázható meg szemléletesen.

A frekvenciaváltozás analitikus leírásához a $\Phi(t)$ fáziseltérést kell megvizsgálnunk. A pontos válasz $\omega_0 t + \Phi(t)$ fázisa egy adott t_0 időpont kis környezetében $\omega_p(t_0) t + \Psi(t_0)$ lineáris kifejezéssel közelíthető, és mivel a $B(t)$ burkoló a rezgéshez képest lassan változik, a t_0 időpont kis környezetében az $y_r(t)$ pontos válasz egy $B(t_0)$ amplitúdójú, $v_p(t_0) = \omega_p(t_0)/(2\pi)$ frekvenciájú és $\Psi(t_0)$ kezdőfázisú harmonikus rezgéssel közelíthető. Az így értelmezett $v_p(t)$

kapott analitikus közelítést *közelítő* válasznak fogjuk nevezni.



14. ábra (a): Egy 12 Hz frekvenciájú, 120 ms hosszú Gauss-impulzusra adott pontos (folytonos vonal) és közelítő (kis körök) válasz. **(b):** A pontos jel $\Phi(t)$ fáziseltérése és köbös polinomközelítése. A beszűrt ábrán a bemenő és a kimenő jel amplitúdó spektrumát látjuk a frekvencia függvényében. A nyilak a maximumra mutatnak



15. ábra (a): Egy 12 Hz frekvenciájú, 200 ms hosszú Gauss-impulzusra adott pontos (folytonos vonal) és közelítő (kis körök) válasz. **(b):** A pontos jel $\Phi(t)$ fáziseltérése és köbös polinomközelítése. A beszűrt ábrán a bemenő és a kimenő jel amplitúdó spektrumát látjuk a frekvencia függvényében. A nyilak a maximumra mutatnak

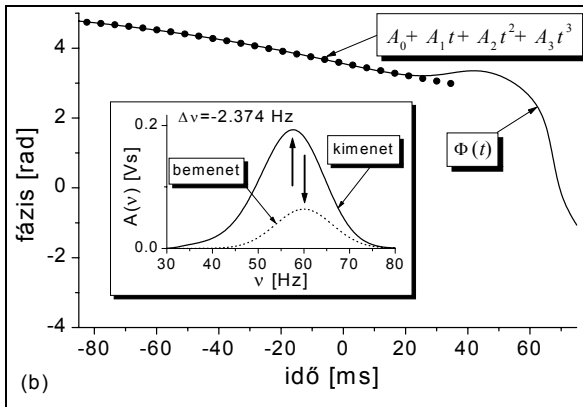
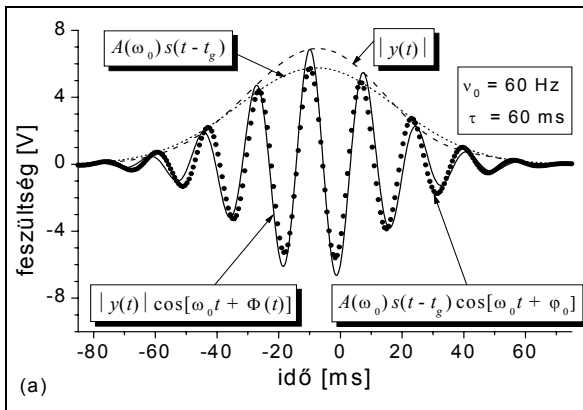
frekvenciát a továbbiakban a jel pillanatnyi frekvenciájának nevezzük. Könnyen megmutatható, hogy $\omega_p(t)$ -nek az ω_0 központi körfrekvenciától való eltérését éppen a $\Phi(t)$ fáziseltérés meredeksége adja meg, amelyből a $\nu_p(t) = \nu_0 + \Phi'(t)/(2\pi)$ egyenletet kapjuk a pillanatnyi frekvenciára. Mindkét esetben a $\Phi(t)$ fáziseltérés jól közelíthető egy köbös polinommal ($\Phi(t) \approx A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3$), amit az ábrákon a szimbólumok szemléltetnek. A polinom együtthatóit az 1. táblázat tartalmazza. A köbös közelítésből számítva a deriváltat, a frekvenciaváltozás a $t = 0$ időpontban 0,979 Hz és 0,319 Hz, a $\tau = 120$ ms és $\tau = 200$ ms impulzushosszakra. Ezen értékek jó összhangban vannak a kimeneti spektrumok

maximumainak 0,936 Hz –es, illetve 0,312 Hz –es eltolódásával.

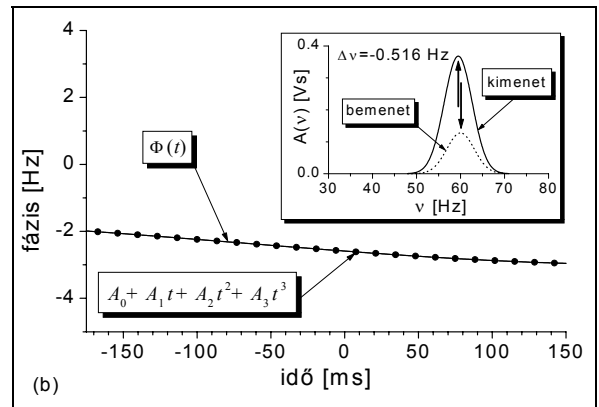
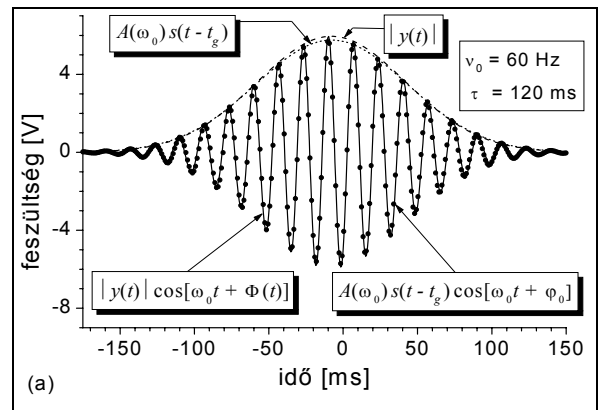
Most vizsgáljuk meg, hogy mi történik akkor, ha a v_0 vivőfrekvencia a rezonancia görbe másik oldalára esik, ahol a rendszer átviteli függvényének amplitúdója monoton csökkenő. A 16. és 17. ábrákon 60 Hz frekvenciájú – az ábrák sorrendjében – 60 ms illetve 120 ms hosszú gerjesztő impulzusra adott pontos és közelítő válaszok láthatók (a). Az ábra (b) része itt is a pontos válasz $\Phi(t)$ fáziseltérését és a $\Phi(t)$ köbös polinom közelítését mutatja. A beszúrt ábrák most is a bemenet és a kimenet spektrumát ábrázolják. Mivel a jelet alkotó spektrális tartományon a rendszer átviteli függvényének amplitúdója monoton csökkenő, a kimenet spektrumának maximuma negatív irányba tolódik el. 60 ms hosszú impulzusra ez az eltolódás -2,374 Hz-nek, míg 120 ms hosszúságnál -0,516 Hz-nek adódott. A köbös közelítésből számított frekvenciaváltozás a $t=0$ időpontban – az 1. táblázat alapján –: -2,818 Hz, $\tau = 60$ ms-nál, illetve -0,526 Hz, $\tau = 120$ ms-nál. Az ábrák (a) részén jól látható, hogy a közelítés a keskenyebb spektrális sáv szélesség esetén (azaz a hosszabb impulzusra) jobb, ami várható is, hiszen ekkor sokkal jobban teljesülnek a közelítés levezetésénél használt feltevések.

v_0 [Hz]	12		60		32	
τ [ms]	120	200	60	120	40	250
A_0 [rad]	1,2795	1,2019	3,5696	-2,5888	-0,3512	-0,3657
A_1 [rad/s]	6,1510	2,0030	-17,6980	-3,3050	-0,0950	-0,0410
A_2 [rad/s ²]	-0,0050	-1,8374·10 ⁻⁴	0,0050	0,0030	-0,0030	-2,5969·10 ⁻⁴
A_3 [rad/s ³]	-5,8448·10 ⁻⁵	-2,2363·10 ⁻⁶	-5,7759·10 ⁻⁴	1,5496·10 ⁻⁵	2,1154·10 ⁻⁶	-7,2948·10 ⁻⁷

1. táblázat: A fáziseltérés köbös polinom közelítésének együtthatói a különféle paraméterekre.



16. ábra (a): Egy 60 Hz frekvenciájú, 60 ms hosszú Gauss-impulzusra adott pontos (folytonos vonal) és közelítő (kis körök) válasz. **(b):** A pontos jel $\Phi(t)$ fáziseltérése és köbös polinomközelítése. A beszűrt ábrán a bemenő és a kimenő jel amplitúdó spektrumát látjuk a frekvencia függvényében. A nyilak a maximumra mutatnak

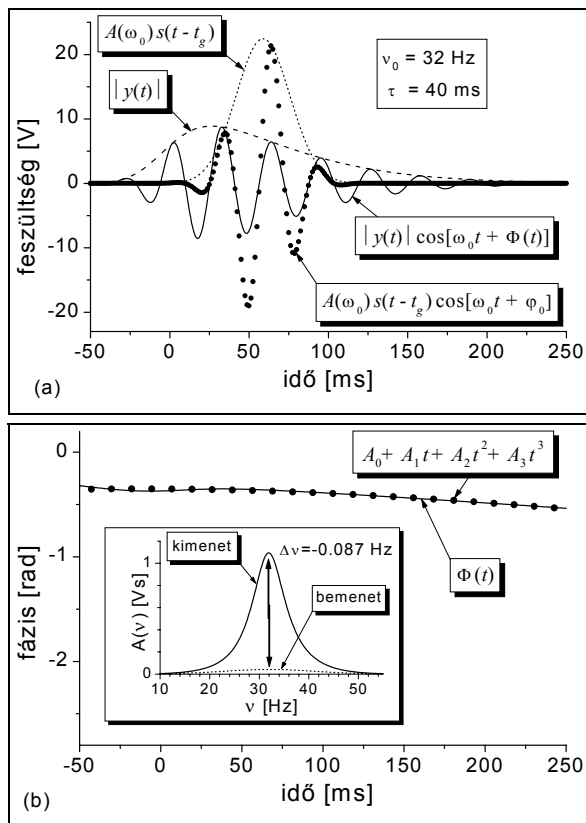


17. ábra (a): Egy 60 Hz frekvenciájú, 120 ms hosszú Gauss-impulzusra adott pontos (folytonos vonal) és közelítő (kis körök) válasz. **(b):** A pontos jel $\Phi(t)$ fáziseltérése és köbös polinomközelítése. A beszűrt ábrán a bemenő és a kimenő jel amplitúdó spektrumát látjuk a frekvencia függvényében. A nyilak a maximumra mutatnak

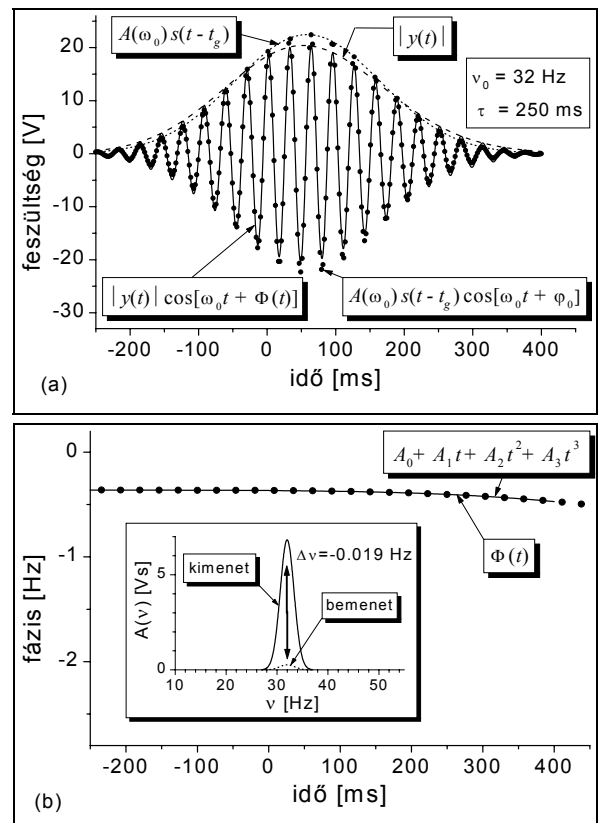
Ezek után nézzük meg, hogy milyen eredményre vezet a közelítés, ha a vivőfrekvencia a rezonancia közelébe esik. Nyilván itt várható a legrosszabb egyezés, hiszen ezen a tartományon változik a rendszer átviteli függvényének az amplitúdója a leggyorsabban. Mivel ezen a tartományon az erősítés és a csoportkésés is nagy, csak két erősítőtől álló rendszert vizsgáltunk. A 18. és 19. ábrán egy 32 Hz frekvenciájú, – az ábrák sorrendjében – 40 ms és 250 ms félértékszélességű Gauss-görbével burkolt bemenetre adott közelítő és pontos válaszok rajzolódnak ki az idő függvényében. A folytonos vonal most is a nem közelített, azaz a pontos feleletet, míg a kis körök a közelített választ jelölik. Nagyon nagy

eltérést tapasztalunk a két válasz között, hiszen a rezonanciartományban vagyunk, ahol az átviteli függvény amplitúdója gyorsan változik a bemenet alkotó spektrális tartományon. Ezért a 18.b ábra beszúrt grafikonján, a kimenő jel spektruma inkább hasonlít a rendszer átviteli függvényének amplitúdójára (lásd a 4.a ábra második sorát), mint a bemenet spektrumára. Ennek következtében, maga a válasz (18.a ábrán), inkább a rendszer súlyfüggvényére (3.b ábra) emlékeztet. A beszúrt ábrákon látható Δv értéke -0,087 Hz, illetve 250 ms hosszú

gerjesztés esetén $\Delta v = -0,019$ Hz. A fáziseltérés köbös polinom közelítésének együtthatóiból számolt frekvenciaváltozások rendre, -0,015 Hz és -0,006 Hz. Itt nem tapasztalunk jó



18. ábra (a): Egy 32 Hz frekvenciájú, 40 ms hosszú Gauss-impulzusra adott pontos (folytonos vonal) és közelítő (kis körök) válasz. **(b):** A pontos jel $\Phi(t)$ fáziseltérése és köbös polinomközelítése. A beszúrt ábrán a bemenő és a kimenő jel amplitúdó spektrumát látjuk a frekvencia függvényében. A nyilak a maximumra mutatnak



19. ábra (a): Egy 32 Hz frekvenciájú, 250 ms hosszú Gauss-impulzusra adott pontos (folytonos vonal) és közelítő (kis körök) válasz. **(b):** A pontos jel $\Phi(t)$ fáziseltérése és köbös polinomközelítése. A beszúrt ábrán a bemenő és a kimenő jel amplitúdó spektrumát látjuk a frekvencia függvényében. A nyilak a maximumra mutatnak.

egyezést a kimeneti spektrumok maximumainak eltolódásával, mert a köbös polinom nem illeszkedik pontosan a $\Phi(t)$ fáziseltérésre.

Az előző három vivőfrekvenciákra végzett számítások tehát azt mutatják, hogy ha a csoportkésés értelmezésénél felhasznált feltevések jól teljesülnek, akkor a közelítés és a pontos numerikus számolás között igen jó az egyezés. Azt is láttuk, hogy a numerikus számítások viszont kitűnő egyezésben állnak a mérési eredményekkel. Következésképpen a csoportkésés – a kívánt feltételek teljesülése esetén –, még negatív értékek (azaz sietés) esetén is, fizikai jelentéssel bír, tehát egyáltalán nem „fizikátlan” mennyiség. A jel az erősítéstől eltekintve alakhűen (azaz torzításmentesen), és a bemenethez képest éppen a csoportkésés által megadott idő múlva lép fel a kimeneten.

V. A rendszer kauzalitása

Eddigi vizsgálataink azt mutatták, hogy jelterjedésnél a rezonancián kívülre eső vivőfrekvenciájú keskeny sáv szélességű impulzus – az erősítéstől eltekintve – torzulás nélkül, a bemenet megelőzve jelentkezik. Ez a tény látszólag ellentmond a kauzalitásnak. Kauzális rendszernek az olyan rendszereket nevezik, melyekre a kimenő jelet egy adott t időpontban csak a bemenet t időpontnál nem későbbi értékei határozzák meg, azaz a jelet csak a múltban és az adott pillanatban történő változások befolyásolják. Mivel az általunk vizsgált rendszerrel a válasz siet a bemenethez képest, érdemes a kauzalitás szempontjából is megvizsgálni a rendszerünket. Egy lineáris időfüggetlen rendszer kauzalitását a súlyfüggvénye határozza meg [13].

Ha egy rendszer kauzális, akkor a súlyfüggvénye nullánál kisebb értékekre, nullát vesz fel, és ez fordítva is igaz, ha egy rendszer súlyfüggvénye nullát vesz fel, nullánál kisebb

értékekre, akkor a rendszer kauzális. Tehát, ha $t < 0$ -ra $w(t) = 0$, akkor a rendszer kauzális és fordítva [13]. Ha $t - \tau \geq 0$, azaz $\tau \geq t$, akkor $w(t - \tau)$ különbözhet zérustól, tehát a (2) konvolúciós integrálban a τ integrálási változónak csak a t -nél kisebb értékei számítanak, hiszen ezentúl már $w(t - \tau) = 0$. A (2) egyenlet a következő módon alakul:

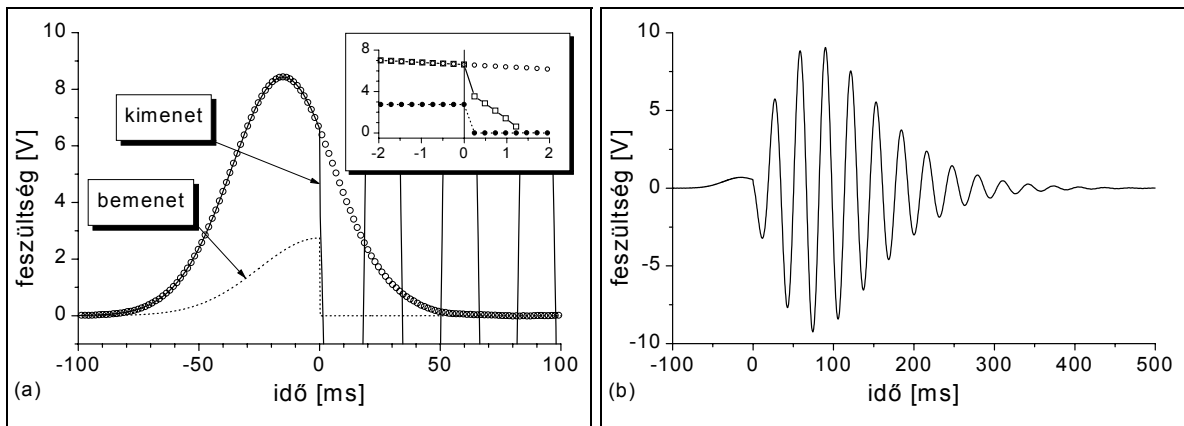
$$y(t) = \int_{-\infty}^t w(t - \tau) u(\tau) d\tau,$$

ami éppen azt jelenti, hogy az $y(t)$ válasz kialakításában a gerjesztésnek csak a múltban és a jelenben felvett értékei számítanak.

Az általunk vizsgált rendszer súlyfüggvényét a (21) egyenlet mutatja, mely két tagból áll. Az első tag egy Dirac-delta függvény, mely $t < 0$ értékekre, definíciója szerint, nullát vesz fel. A második tagban szereplő $h_k(t)$ függvény, a (24) egyenletből láthatóan, tartalmazza a $\Theta(t)$ egységugrás függvény tényezőt, amely – az (1) egyenlet értelmében – szintén nullát vesz fel nullánál kisebb t értékekre, ezáltal $h_k(t)$ -re is teljesül a kauzalitás feltétele. A súlyfüggvény mindkét tagja eleget tesz a kauzalitás feltételeinek. Ezzel matematikailag beláttuk, hogy tetszőleges számú sorba kapcsolt azonos erősítőből álló rendszerünk: kauzális rendszer.

A kauzalitás viselkedést két kísérletsorozattal szemléltetjük. A kísérletekhez négy erősítőből álló rendszert használtunk. Az első kísérletben egy 0 Hz vivőfrekvenciájú és 60 ms hosszúságú Gauss-impulzus gerjesztést kapcsoltunk a bemenetre, melynek a második felét (a „hátát”) $t > 0$ értékekre levágtuk. A második sorozatban a gerjesztés szintén Gauss-görbe alakú, de itt a görbe elejét (a „frontját”) vágtuk le bizonyos feszültség szint alatt. Mivel itt a jel frontjának terjedését vizsgáljuk, igen fontos a mérésnél fellépő zaj csökkentése. Ezért ezeknél a kísérleteknél a mért kimenetet 15 mérés átlagából nyertük.

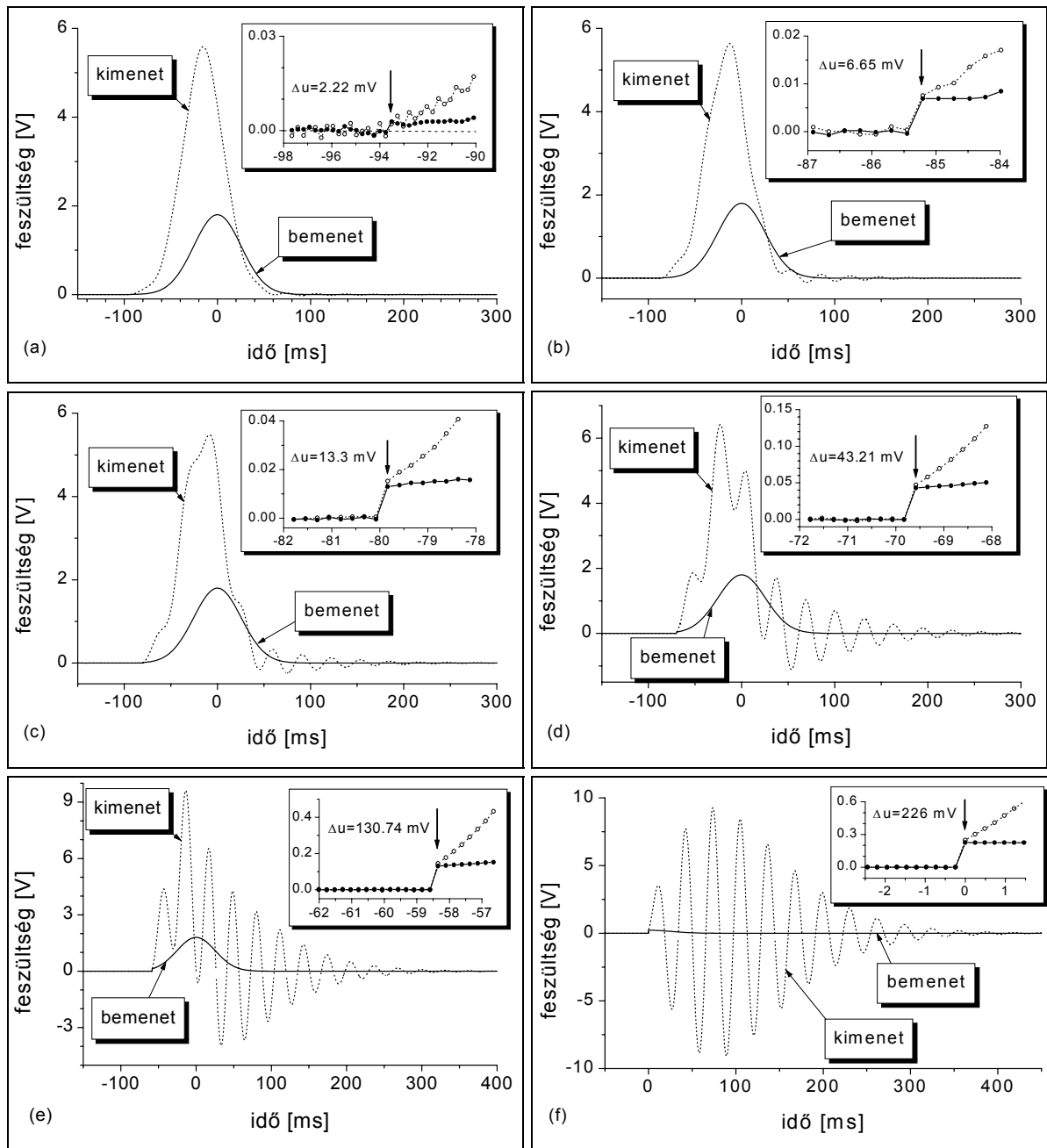
Az első kísérlet eredményét a 20. ábrán követhetjük nyomon. A rendszer válasza erre a gerjesztésre $t = 0$ -ig ugyanaz, mint a korábban már tárgyalt teljes Gauss-görbe alakú jelre



20.ábra. (a): A „hátán” csonkított ($t = 0$ után levágott) Gauss-görbe gerjesztésre adott (mért) válasz az idő függvényében (folytonos vonal). A kis körök a csonkítatlan gerjesztések megfelelő (mért) választ jelölik (lásd **6.ábrán** is). A gerjesztés szakadása miatt a kimenet berezeg, melynek a közel függőleges vonalak felelnek meg. A beszúrt ábrán a $t = 0$ kis környezetét rajzoltuk meg. A szimbólumok a mérési pontokat (azaz a mintavételeket) jelölik: az üres négyzetek a csonkított bemenet választát, az üres körök továbbra is a csonkítatlan bemenetre adott választ, és a teli körök pedig a bemenetet. **(b):** Csökkentett amplitúdójú bemenetre adott válasz. Itt az ugrás miatt bekövetkező oszcilláció is teljesen látható..

adott válasz (lásd 6.ábra), majd ahogy hirtelen levágjuk a jelet, a kimenet is hasonló módon „levágódik” és erős oszcillációba kezd. Hogy a berezegés a jelet regisztráló AD konverter működési tartományába (azaz $[-10 \text{ V}, 10 \text{ V}]$ intervallumba) essen, a kimenetet csökkentett amplitúdójú bemenet esetére is megmértük, ez látható az ábra (b) részén. A beszúrt kis ábrán a kritikus ($t = 0$) hely és közvetlen környezete látható kinagyítva. Itt minden egyes mérési pontot feltüntettünk. A teli körök a bemenet pontjait, az üres négyzetek a kimenő jel pontjait, míg az üres körök a csonkoltatlan Gauss-görbére adott választ jelölik. Tehát a bemenet adott időben történő megváltozása, a kimenetnél is ugyanabban az adott időben jelentkezik és nem előbb, azaz teljesül a kauzalitás. A kísérletünk azt mutatja, hogy a kimenet maximuma nincs oksági viszonyban a bemenet maximumával, hanem azt csak a megjelenéséig jelentkező gerjesztés határozza meg.

A második kísérletsorozat eredménye a 21. ábrán látható. A gerjesztések, mint már korábban is említettük, 60 ms hosszúságú Gauss-görbe alakúak, melyeknek az elejét bizonyos



21. ábra: Az elején Δu szint alatt levágott 60 ms hosszú Gauss-görbe alakú gerjesztésekre (folytonos vonal) adott válaszok (pontozott vonal) az idő függvényében. A beszűrt kis ábrák a levágási idő környezetét mutatják. A bemeneten fellépő Δu nagyságú ugrás helyét nyíl mutatja.

feszültségszinteknél kisebb értékeknél levágtuk. A 21.(a) ábrán egy 2,22 mV feszültségnél⁴ levágtott bemenetre (folytonos vonal) adott kimenet (szaggatott vonal) látható. Szinte hihet-

⁴ Az ugrás a jelet előállító DA konverter kimenetén mindössze 10 kvantumugrás volt, amit a feszültségosztóval 0,1815-szeresére tovább csökkentettünk.

len, hogy ilyen parányi kis változás a bemeneten, észrevehető mértékű változást eredményez a kimeneten. A beszúrt kis ábrán e kritikus hely környezete jól vizsgálható. A 21.(b) ábrán gerjesztésünket 6,65 mV-nál vágtuk le, itt már szembetűnő a kimenő jel változása a csonkítatlan kimenethez képest (lásd 6.ábra). A 21.(c–f) ábrák sorrendben 13,3 mV, 43,21 mV, 130,74 mV és 226 mV feszültségnél levágott bemenetet és a rá adott válaszokat mutatják.. Lényeges - amint azt a beszúrt ábrák is mutatják –, hogy a kimenet mindaddig nulla, amíg a bemenet is nulla. A bemeneten fellépő változás csak a megjelenésekor hat a kimenetre, azaz a jelent itt is a múlt és a jelen határozza meg.

Összefoglalás

A dolgozatban egy lineáris és időfüggetlen rendszert, – egy egyszerű lineáris erősítőt – vizsgáltunk a jelterjedés és a kauzalitás szempontjából. Meghatároztuk a rendszer jellemzésére alkalmas átviteli függvényt (lásd (16) egyenlet), amit kétféleképpen meg is mértünk. Az első módszernél a bemenetre szinuszos gerjesztést, míg a második módszernél, impulzusgerjesztést (közelítő Dirac-delta függvényt) kapcsoltunk és mértük a rendszer szinuszos illetve közelítő impulzusválaszát. Ábrázolva az átviteli függvény amplitúdóját és fázisát az idő függvényében (lásd a 2.és 4. ábrán), a számított és a mért értékek, mindkét esetben, jó egyezést mutattak.

Az átviteli függvény ismeretében meghatároztuk a fázis- és csoportkésést. A csoportkésleltetés szempontjából rendszerünk igen érdekes, mert negatív értékeket is felvesz, ami azt jelenti, hogy megfelelő feltételek teljesülése esetén, a jel az erősítéstől eltekintve *torzításmentesen*, a bemenetet *megelőzve* halad át a rendszeren. Ezen kérdéskör elméleti és kísérleti megvizsgálásához egy Gauss-görbével burkolt, ν_0 központi frekvenciájú impulzust választottunk a rendszer gerjesztéséhez. Először olyan bemeneteket vizsgáltunk, melyeknek

vivőfrekvenciáján a csoportkésés negatív, másodszor pedig olyat, ahol pozitív. A számolt és mért válaszok között, mind a nyolc esetben, jó egyezést tapasztaltunk, valamint a jel sietése vagy késése – a várakozásnak megfelelően – a csoportkésés előjelével összhangban volt, azaz ahol a csoportkésés negatív volt, ott a jel sietett, és ahol pozitív volt, ott késett a bemenethez képest.

Mindezek után azt vizsgáltuk meg, hogy mikor írja le pontosabban a jel késését a csoportkésés. Összevetettük a csoportkésés származtatásánál kapott közelítő (15) egyenletből adódó és a pontos (13) egyenletből numerikus számolással nyert eredményeket. Három vivőfrekvenciát és minden frekvencián két különböző hosszúságú bemenetet (azaz hat esetet) vizsgáltunk. Ha a csoportkésés értelmezésénél felhasznált feltevések jól teljesülnek, akkor a közelítés és a pontos numerikus számolás között igen jó egyezést láttunk, valamint a numerikus számítások kitűnő egyezésben álltak a mérési eredményekkel. Következésképpen megállapíthatjuk, hogy a csoportkésés – a kívánt feltételek teljesülése esetén –, még negatív értékek (azaz sietés) esetén is, fizikai jelentéssel bír, tehát egyáltalán nem „fizikátlan” mennyiség.

Eddigi vizsgálataink azt mutatták, hogy jelterjedésnél a rezonancián kívülre eső vivőfrekvenciájú keskeny sáv szélességű impulzus – az erősítéstől eltekintve – torzulás nélkül, a bemenetet megelőzve jelentkezik. Ez a tény látszólag ellentmond a kauzalitásnak. Ennek jártunk utána a következőkben. A rendszer kauzalitását a súlyfüggvényének vizsgálatával igazoltuk. A rendszer kauzális viselkedését két kísérletsorozattal szemléltettük. Az első sorozatban egy Gauss-görbe alakú gerjesztést kapcsoltunk rendszerünkre, melynek a második felét (a „hátát”) $t > 0$ értékekre levágtuk. A második sorozatban a gerjesztés szintén Gauss-görbe alakú, de itt a görbe elejét (a „frontját”) vágtuk le bizonyos feszültség szint alatt. A bemenet adott időben történő megváltozása, a kimenetnél is ugyanabban az adott időben jelentkezett és nem előbb, azaz teljesült a kauzalitás. Kísérletünk megmutatta, hogy a kimenet

maximuma nincs oksági viszonyban a bemenet maximumával, hanem azt csak a megjelenéséig jelentkező gerjesztés határozza meg.

Függelék

A. Az erősítő megépítésével és a méréssel kapcsolatos megjegyzések

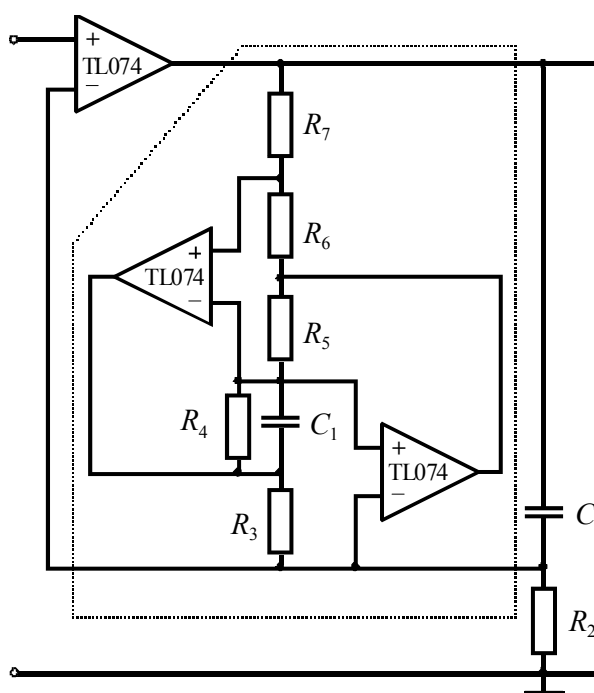
Az 1. ábrán található erősítő elvi kapcsolási rajza, a gyakorlatban a 22. ábrán látható módon nézett ki, a következő paraméterekkel:

$$R_2 = 29,9 \text{ k}\Omega, \quad R_3 = 10 \text{ k}\Omega, \quad R_4 = 119,7 \text{ k}\Omega,$$

$$R_5 = 29,9 \text{ k}\Omega, \quad R_6 = 10 \text{ k}\Omega, \quad R_7 = 33 \text{ k}\Omega,$$

$$C = 158,8 \text{ nF}, \quad C_1 = 104 \text{ nF}.$$

A pontozott vonallal bekeretezett rész tartalmazza a nagy értékű L induktivitás gyakorlati megvalósítását egy girátor [14] segítségével. A bekeretezett rész ekvivalens egy L induktivitás és az R_1 ellenállás sorba



22. ábra: Az erősítő gyakorlati megvalósítása. A pontozott vonallal bekeretezett rész ekvivalens az (1. ábrán található) L induktivitás és az R_1 ellenállás sorba kapcsolásával.

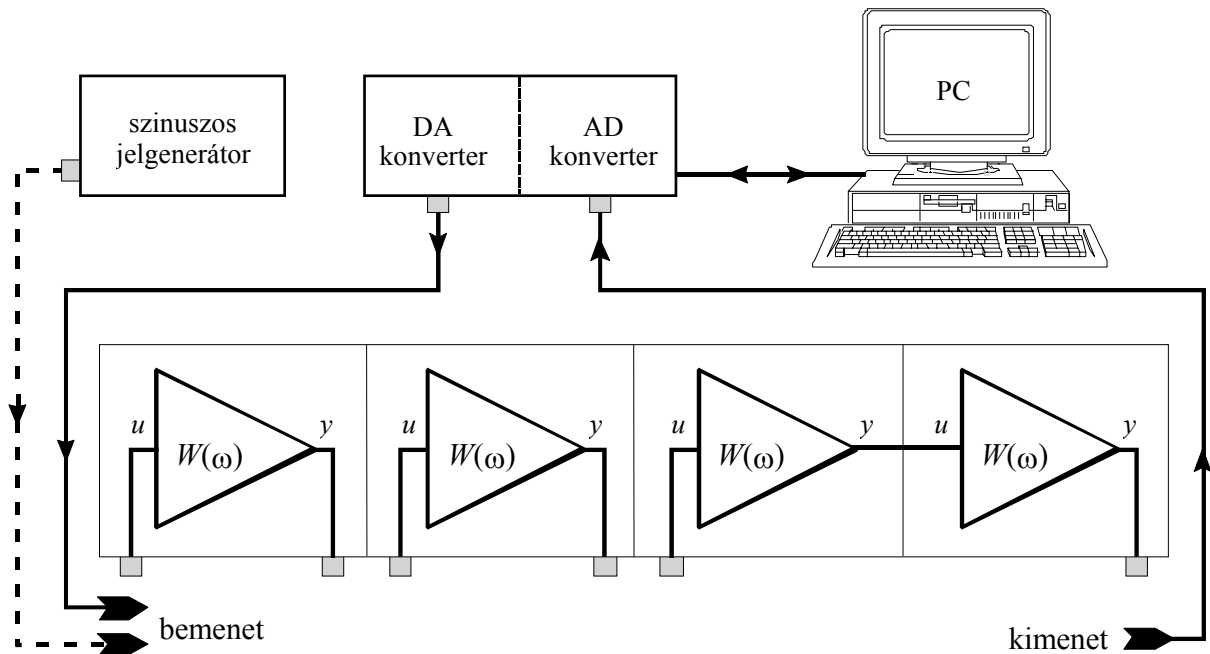
kapcsolásával, azaz az impedanciája [14] alapján: $Z = R_1 + i L \omega$ alakú,

ahol

$$R_1 = \frac{R_3 R_5 R_7}{R_4 R_6} = 8,24 \text{ k}\Omega \quad \text{és} \quad L = \frac{R_3 R_5 R_7}{R_6} C_1 = 154,71 \text{ H}.$$

Mint azt már említettük, hogy a jel késése vagy sietése nagyobb legyen, négy egymással azonos erősítőt készítettünk el. A négy azonos erősítőt a 23. ábrán látható sorrendben és módon összekötvé, fémdobozban, egymástól is leárnýékolva helyeztünk el. A dobozban, a

harmadik és negyedik erősítő sorba volt kapcsolva. A blokkok segítségével meg tudtuk valósítani az aktuális mérésekhez szükséges – megfelelő számú – sorba kapcsolt erősítőkből álló rendszert.



23. ábra: A mérési elrendezés vázlata. Az átviteli függvény harmonikus gerjesztéssel történő mérésénél egy erősítőből állt a rendszer, és a gerjesztést egy szinuszos jelgenerátor szolgáltatta. Az átviteli függvény impulzusgerjesztéssel való mérésénél és a jelterjedés vizsgálatánál a bemenetet a DA konverter állította elő és a kimenetet az AD konverter mérte. Az utóbbi esetekben az erősítőket sorba kötöttük.

Az erősítők bemenetét és kimenetét, valamint a jelgenerátor és a konverterek be- és kimeneteit koaxiális kábellel kötöttük össze. A visszacsatolás kiküszöbölésének érdekében az erősítők mindegyike külön stabilizáló IC-ről kapta a tápfeszültséget. A jelterjedés vizsgálatánál a jelet kibocsátó DA konverter és a kimenetet detektáló AD konverter egymáshoz voltak szinkronizálva. Azaz a jel kiadásakor indult a mintavételezés.

B. A fázis és a csoportkésés kiszámítása

Mint azt már megmutattuk, az erősítő átviteli függvénye a

$$W(\omega) = 1 + \frac{1}{T} \frac{2\beta + i\omega}{\omega_s^2 - \omega^2 + i2\beta\omega}$$

egyenlettel számítható ki. Ha bevezetjük a $\Omega = \omega/\omega_s$, $Q = \omega_s/(2\beta)$,

$K = 1/(T\omega_s)$ dimenziómentes változókat, akkor az átviteli függvény a következő alakú:

$$W(\omega) = 1 + K \frac{1 + Qi\Omega}{Q(1 - \Omega^2) + i\Omega}.$$

Ezt az $Ae^{i\varphi}$ alakban felírva, egyszerű számolással adódik, hogy

$$A(\Omega) = \sqrt{\frac{[K + Q(1 - \Omega^2)]^2 + \Omega^2[1 + QK]^2}{Q^2(1 - \Omega^2) + \Omega^2}} \text{ és}$$

$$\varphi(\Omega) = \arctg \frac{\Omega(1 + QK)}{Q(1 + \Omega^2) + K} - \arctg \frac{\Omega}{Q(1 - \Omega^2)}, \quad (18)$$

ebből a fáziskésés:

$$t_p(\Omega) = -\frac{1}{\omega_s} \frac{\varphi(\Omega)}{\Omega}. \quad (19)$$

A (18) egyenletet deriválva,

$$\varphi'(\Omega) = \frac{(1 + KQ)(Q + K + Q\Omega^2)}{\Omega^2(1 + KQ)^2 + [Q(1 - \Omega^2) + K]^2} - \frac{Q(1 + \Omega^2)}{\Omega^2 + Q^2(1 - \Omega^2)^2},$$

kapjuk a csoportkésést:

$$t_g(\Omega) = -\frac{1}{\omega_s} \frac{d\varphi}{d\Omega}. \quad (20)$$

A (19) egyenletből látszik, hogy $\Omega = 0$ -nál a fáziskésés 0/0 típusú, t_p értékét a L'Hospital-szabállyal kapjuk

$$t_p(0) = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\omega_s} \frac{\varphi(\Omega)}{\Omega} \right] = -\frac{\varphi'(0)}{\omega_s} = -\frac{1}{\omega_s} \frac{K(Q^2 - 1)}{Q(K + Q)}$$

A (20) egyenlettel összehasonlítva, ha ω tart nullához, akkor a fázis- és a csoportkésés azonos határértékhez tartanak, amely az 5. ábrán is jól látható.

C. Impulzusválasz kiszámítása a különböző fokozatok esetén

A fentiek során láttuk, hogy egy fokozat átviteli függvénye a $W(\omega) = 1 + H(\omega)/T$ alakba írható, ahol

$$H(\omega) = \frac{2\beta + i\omega}{\omega_s^2 - \omega^2 + i2\beta\omega}.$$

Továbbá megmutattuk, hogy n azonos erősítő sorba kapcsolása esetén a teljes rendszer

átviteli függvénye $W^n(\omega) = \left(1 + \frac{H(\omega)}{T}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{H^k(\omega)}{T^k}$, és ennek az inverz Fourier-

transzformáltja adja a teljes rendszer súlyfüggvényét:

$$w_n(t) = \delta(t) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{h_k(t)}{T^k}, \quad (21)$$

ahol $\binom{n}{k}$ a binomiális együtthatók és a $h_k(t) = \mathbf{F}^{-1}\{H^k(\omega)\}$.

Végrehajtva a $p = i\omega$ helyettesítést, látható, hogy a $H(\omega) = H[p(\omega)]$ függvény a p változó racionális törtfüggvénye: $H(p) = \frac{2\beta + p}{p^2 + 2\beta p + \omega_s^2}$, amelyből már könnyen felírhatjuk

a $H^k(p)$ függvényt parciális törtekre bontva. A felbontáshoz először a nevezőben lévő polinom gyökeit kell meghatározni. Nyilván a $H^k(p)$ nevezőjének gyökei azonosak a $p^2 + 2\beta p + \omega_s^2$ polinom p_1 és p_2 gyökeivel, és mindkét gyök k multiplicitású. A gyökök egyszerű számolással adódnak:

$$p_{1,2} = -\beta \pm i\omega_r, \text{ ahol } \omega_r = \sqrt{\omega_s^2 - \beta^2}.$$

Mivel a komplex számok teste feletti irreducibilis polinomok legfeljebb első fokúak, a $H^k(p)$ függvény parciális törtekre bontása a következő alakú:

$$H^k(p) = \sum_{m=1}^k \left\{ \frac{C_{1m}^{(k)}}{(p-p_1)^m} + \frac{C_{2m}^{(k)}}{(p-p_2)^m} \right\}, \quad (22)$$

ahol a $C_{jm}^{(k)}$ komplex állandók. Kihhasználva, hogy $H^k(p)$ számlálója és nevezője egyaránt valós együtthatós polinom, megmutatható, hogy a két komplex állandó adott m esetén a $j = 1$ és 2 értékekre egymás konjugáltjai, azaz $C_{2m}^{(k)} = [C_{1m}^{(k)}]^*$, ahol a $*$ a komplex konjugálást jelöli. Így az (22) egyenlet, továbbá $p = i\omega$ helyettesítés, valamint a $p_{1,2} = -\beta \pm i\omega_r$ gyökök értékei alapján $\mathbf{F}^{-1}\{H^k(\omega)\}$ kiszámításához az

$$\mathbf{F}^{-1} \left\{ \frac{a+ib}{[\beta+i(\omega-\omega_r)]^m} + \frac{a-ib}{[\beta+i(\omega+\omega_r)]^m} \right\}$$

alakú kifejezéseket kell meghatároznunk. Ez pedig az $\mathbf{F}\{\Theta(t)e^{-\beta t}\} = \frac{1}{\beta+i\omega}$ összefüggés és

a Fourier-transzformált ω szerinti n -edik deriváltjára vonatkozó $F^{(n)}(\omega) = \mathbf{F}\{(-it)^n f(t)\}$

általános szabály ismeretében viszonylag egyszerűen kiszámítható ($F(\omega) = \mathbf{F}\{f(t)\}$ és $\Theta(t)$

az egységugrás függvény). Mindebből az

$$\mathbf{F}\{\Theta(t)t^n e^{-\beta t}\} = \frac{n!}{(\beta+i\omega)^{n+1}}$$

összefüggés következik, amelyből a Fourier-transzformált linearitásából és a frekvencia eltolásra vonatkozó tulajdonságából már egyszerű számolással kapjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1} \left\{ \frac{a+ib}{[\beta+i(\omega-\omega_r)]^{n+1}} + \frac{a-ib}{[\beta+i(\omega+\omega_r)]^{n+1}} \right\} &= \Theta(t) \frac{t^n e^{-\beta t}}{n!} \left[(a+ib)e^{i\omega_r t} + (a-ib)e^{-i\omega_r t} \right] \\ &= \Theta(t) \frac{t^n}{n!} e^{-\beta t} 2 \operatorname{Re} \left[(a+ib)e^{i\omega_r t} \right] \\ &= \Theta(t) \frac{t^n}{n!} e^{-\beta t} 2 (a \cos \omega_r t - b \sin \omega_r t) \end{aligned} \quad (23)$$

Az (22) és a (23) egyenletek alapján már könnyen meghatározhatjuk a $h_k(t)$ függvényt:

$$\begin{aligned}
h_k(t) = \mathbf{F}^{-1}\{H^k(\omega)\} &= \sum_{m=1}^k \mathbf{F}^{-1}\left\{\frac{C_{1m}^{(k)}}{[\beta + i(\omega - \omega_r)]^m} + \frac{[C_{1m}^{(k)}]^*}{[\beta + i(\omega + \omega_r)]^m}\right\} \\
&= 2\Theta(t)e^{-\beta t} \sum_{m=1}^k \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} (\operatorname{Re}[C_{1m}^{(k)}] \cos \omega_r t - \operatorname{Im}[C_{1m}^{(k)}] \sin \omega_r t)
\end{aligned} \tag{24}$$

A (21) és a (24) egyenletekből tehát adódik a keresett súlyfüggvény. A könnyebb áttekinthetőség kedvéért megismételtük a (21) egyenletet:

$$w_n(t) = \delta(t) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{h_k(t)}{T^k}. \tag{25}$$

A továbbiakban közöljük az általunk vizsgált $n = 1, 2, 3$ és 4 értékekre a súlyfüggvény explicit kiszámításához szükséges $C_{1m}^{(k)}$ állandókat ($m = 1, \dots, k$). Ezek tulajdonképpen az elemi törtekre való bontásnál használt bármelyik eljárással meghatározhatók. Esetünkben talán a differenciáláson alapuló eljárás tűnik a legalkalmasabbnak. Az állandókat a

$$C_{jm}^{(k)} = \lim_{p \rightarrow p_j} \frac{d^{k-m}}{dp^{k-m}} \frac{(p - p_j)^k H^k(p)}{(k - m)!}$$

képletből számíthatjuk ki, ($j = 1, 2$ és $m = 1, \dots, k$), amely $H^k(p)$ konkrét formáját használva, a számunkra érdekes $C_{1m}^{(k)}$ állandóra a

$$C_{1m}^{(k)} = \frac{1}{(k - m)!} \frac{d^{k-m}}{dp^{k-m}} \left(\frac{p + 2\beta}{p - p_2} \right)^k \Bigg|_{p=p_1} \tag{26}$$

összefüggést adja. A (26) egyenletből meghatároztuk a $n = 1, 2, 3$ és 4 értékekre a keresett állandókat. A számolások könnyebb leírása miatt érdemes bevezetni következő állandókat:

$$X = \frac{\beta}{\omega_r}, \quad A = 1 + X^2, \quad B = 1 - X^2,$$

$$C = 1 + 6X^2 + 5X^4, \quad D = 1 - 6X^2 + X^4$$

Egy fokozat, azaz egy erősítő esetén ($k = 1$):

$$C_{11}^{(1)} = \frac{1}{2} \{1 - iX\}$$

A (23) egyenletnek megfelelően

$$h_1(t) = \mathbf{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \Theta(t) e^{-\beta t} \{\cos \omega_r t + X \sin \omega_r t\}.$$

Két fokozat, azaz két sorba kapcsolt erősítő esetén ($k = 2$):

$$C_{11}^{(2)} = -\frac{iA}{4\omega_r} \quad \text{és} \quad C_{12}^{(2)} = \frac{B - i2X}{4}, \quad \text{illetve}$$

$$h_2(t) = \Theta(t) \frac{e^{-\beta t}}{2} \left[\{B \cos \omega_r t + 2X \sin \omega_r t\} t + \frac{A}{\omega_r} \sin \omega_r t \right].$$

Három fokozat, azaz három sorba kapcsolt erősítő esetén ($k = 3$):

$$C_{11}^{(3)} = -\frac{3iAX}{16\omega_r^2}, \quad C_{12}^{(3)} = -3A \frac{X+i}{16\omega_r} \quad \text{és} \quad C_{13}^{(3)} = \frac{1-3X^2-iX(3-X^2)}{8}, \quad \text{valamint}$$

$$h_3(t) = \Theta(t) \frac{e^{-\beta t}}{8} \left\{ \frac{3AX}{\omega_r^2} \sin \omega_r t - \frac{3At}{\omega_r} (X \cos \omega_r t - \sin \omega_r t) + \right. \\ \left. + t^2 [(1-3X^2) \cos \omega_r t + X(2+B) \sin \omega_r t] \right\}.$$

Négy fokozat, azaz négy sorba kapcsolt erősítő esetén ($k = 4$):

$$C_{11}^{(4)} = -\frac{iC}{32\omega_r^3}, \quad C_{12}^{(4)} = -\frac{C+i4AX}{32\omega_r^2}, \quad C_{13}^{(4)} = -A \frac{2X+iB}{8\omega_r}, \quad C_{14}^{(4)} = \frac{D-i4BX}{16} \quad \text{és}$$

$$h_4(t) = \Theta(t) e^{-\beta t} \frac{1}{48\omega_r^3} \left[3C \sin \omega_r t - 3\omega_r t \{C \cos \omega_r t - 4XA \sin \omega_r t\} - \right. \\ \left. - 6(\omega_r t)^2 A \{2X \cos \omega_r t - B \sin \omega_r t\} + \right. \\ \left. + (\omega_r t)^3 \{D \cos \omega_r t + 4XB \sin \omega_r t\} \right].$$

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet mondok Dr. Horváth Zoltánnak, szakdolgozat vezető tanáromnak, aki áldozatos munkájával segített a dolgozat elkészítésében. Továbbá köszönöm Dr. Bor Zsoltnak az Optikai és Kvantumelektronikai Tanszék vezetőjének és a IV. éves fizikus laboratórium oktatóinak, Dr. Klebniczki Józsefnek, Kovács Attilának és Kurdi Gábornak, hogy a elkészítéséhez szükséges feltételeket biztosították, és lehetőséget nyújtottak a dolgozathoz szükséges mérések és számítások elvégzéséhez. Köszönetet mondok az elektronikus műhely dolgozóinak, Sipos Bélának és Frank Bélának, az erősítő elkészítéséért. Hálával tartozom Dr. Szatmári Sándornak a Kísérleti Fizikai Tanszék vezetőjének és Dr. Gingl Zoltánnak, hogy a tanszékükön kifejlesztett számítógépes mérőrendszert a rendelkezésünkre bocsátották.

Irodalomjegyzék

- [1] L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity*, (Academic Press, New York 1960)
- [2] K. E. Oughstun and G. C. Sherman, *Electromagnetic Pulse Propagation in Causal Dielectrics* (Spinger--Verlag, Berlin 1994)
- [3] R. L. Smith, *The Velocities of Light*, Am. J. Phys. **38**, 978 (1970)
- [4] C. G. B. Garrett and D. E. McCumber, *Propagation of a Gaussian Light Pulse through an Anomalous Dispersion Medium*, Phys. Rev. A **1**, 305 (1970)
- [5] S. Chu and S. Wong, *Linear Pulse Propagation in an Absorbing Medium*, Phys. Rev. Lett. **48**(11), 738-741 (1982)
- [6] E. Bolda, R. Y. Chiao and J. Garrison, *The Two Theorems for the Group Velocity in Dispersive Media*, Phys. Rev. A **48**(5), 3890-3894 (1993)
- [7] R. Y. Chiao and A. M. Steinberg, *Tunneling Times and Superluminality*, Progress in Optics (vol. **XXXVII**, Ed.: E. Wolf, Elsevier 1997) p. 345
- [8] G. Nimtz and W. Heitmann, *Superluminal Photonic Tunneling and Quantum Electronics*, Prog. Quant. Electr.**21**, 81 (1997)
- [9] Z. L. Horváth and Zs. Bor, *Reshaping of Femtosecond Pulses by the Gouy Phase Shift*, Phys. Rev. E **60**, 2337-2346 (1999)
- [10] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, (Pergamon Press, Oxford 1989)
- [11] M. W. Mitchell and R. Y. Chiao, *Causality and negative group delays in a simple bandpass amplifier*, Am. J. Phys. **66**, 14-19 (1998)
- [12] L. A. Zadeh és E. Polak, *Rendszerelemélet*, (Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1972)
- [13] Fodor György, *Lineáris rendszerek analízise*, (Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1967)
- [14] Tietze, Schenk, *Analóg és digitális áramkörök*, (Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1993)