Természeti jelenségek fizikája gyakorlat (levelező)

Pogány Andrea
andrea@titan.physx.u-szeged.hu

Követelmények

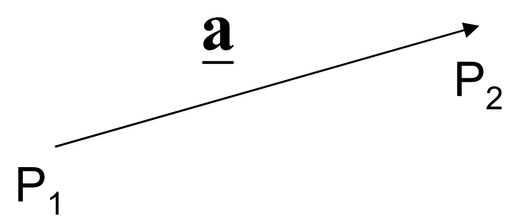
A gyakorlat teljesítésének feltétele egy ZH sikeres megírása

ZH időpontok: Az elméleti vizsga előtt, azaz: vizsganapokon a Fröhlich teremben, délután 3 órakor
(tehát nem 2-kor, ahogy gyakorlaton megbeszéltük, mert a terem a vizsgaidőpontok előtt többnyire foglalt!)

ZH szabályok:
- a ZH három számolási feladatból áll
- a feladatok megoldásához papírt, tollat és számológépet lehet használni (függvénytáblázatot, órai jegyzetet nem)
- az egyenleteket, képleteket tudni kell
- feladatok megoldásához szükséges adatok, állandók meg lesznek adva, ezeket nem kell fejből tudni

Vektorok

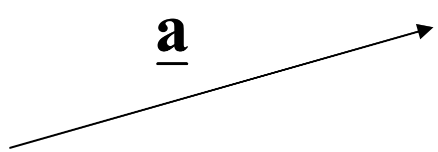
vektor: a tér egy rendezett pontpárja által kijelölt, az első pontból a másodikba mutató irányított szakasz → nagysággal és iránnyal jellemezhető



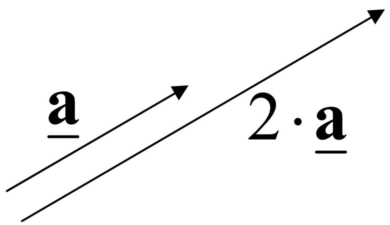
nullvektor: abszolutértéke 0, iránya tetszőleges
egységvektor: abszolutértéke 1

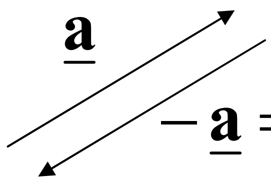
szabad vektor: önmagával párhuzamosan eltolható
helyvektor: rögzített kezdőpont

Műveletek vektorokkal



szorzás skalárral:



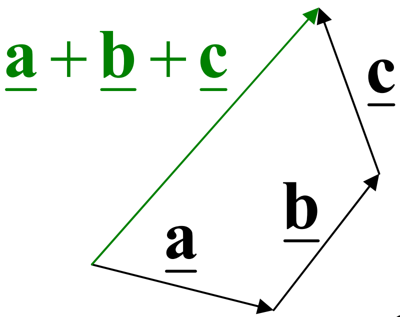


$$-\underline{\mathbf{a}} = -1\cdot\underline{\mathbf{a}}$$

pl.: $\underline{\mathbf{p}} = m\cdot\underline{\mathbf{v}}$

$$\underline{\mathbf{F}} = m\cdot\underline{\mathbf{a}}$$

összeadás, kivonás:

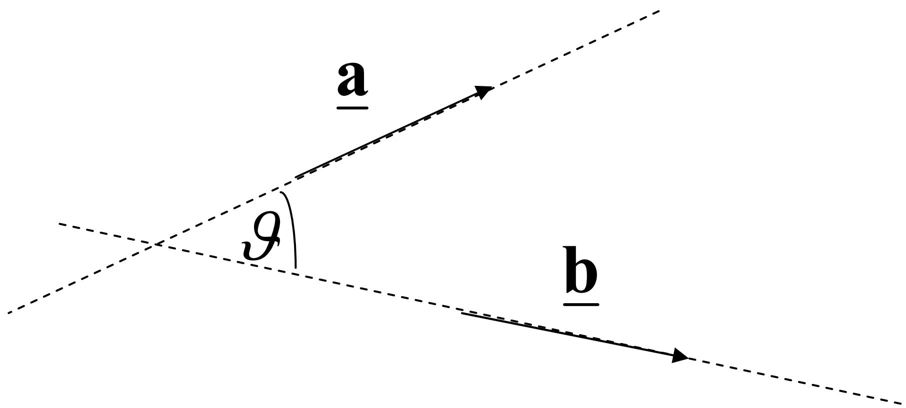


$$\underline{\mathbf{a}}+\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{b}}+\underline{\mathbf{a}}$$

$$\underline{\mathbf{a}}-\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{a}}+(-\underline{\mathbf{b}})$$

$$\alpha\cdot(\underline{\mathbf{a}}+\underline{\mathbf{b}}) = \alpha\cdot\underline{\mathbf{a}}+\alpha\cdot\underline{\mathbf{b}}$$

két vektor által bezárt szög:



lineáris kombináció: $\alpha\cdot\underline{\mathbf{a}}+\beta\cdot\underline{\mathbf{b}}$

Műveletek vektorokkal

Skalár szorzat:

$$\underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}} = A$$
$$A = a \cdot b \cdot \cos\varphi$$

pl.: $W = \underline{\mathbf{F}}\underline{\mathbf{s}} = F \cdot s \cdot \cos\varphi$

$$\underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{b}}\underline{\mathbf{a}}$$
$$\underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{0}} = 0$$
$$\underline{\mathbf{a}}(\underline{\mathbf{b}}\underline{\mathbf{c}}) \neq (\underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}})\underline{\mathbf{c}}$$
$$(\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}})\underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{c}} + \underline{\mathbf{b}}\underline{\mathbf{c}}$$

Vektori szorzat:

$$\underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}} = [\underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}]$$
$$|\underline{\mathbf{c}}| = c = a \cdot b \cdot \sin\varphi$$

iránya – jobbkézszabály alapján

pl.: $F_{Cor} = 2m(\underline{\mathbf{v}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}}) = 2m \cdot v \cdot \omega \cdot \sin\varphi$

$$\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}} = -\underline{\mathbf{b}} \times \underline{\mathbf{a}}$$
$$\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{0}} = \underline{\mathbf{0}}$$
$$\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{0}}$$
$$\underline{\mathbf{a}} \times \underline{(\mathbf{b} \times \underline{\mathbf{c}})} \neq (\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}) \times \underline{\mathbf{c}}$$
$$\underline{\mathbf{a}} \times (\underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{c}}) = \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{c}}$$

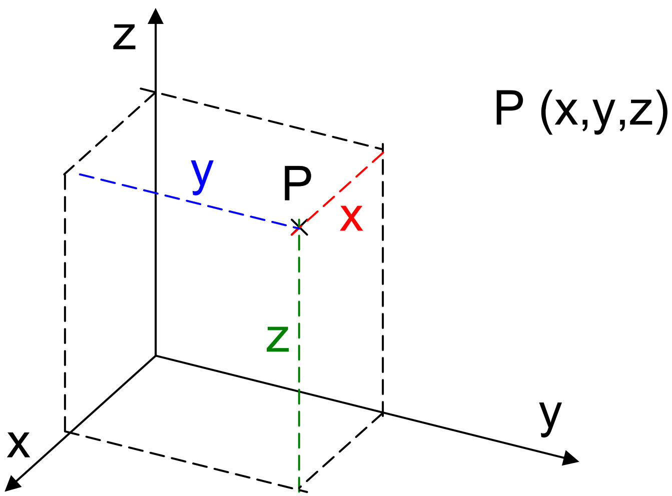
Vonatkoztatási rendszer

vonatkoztatási rendszer: rögzített viszonyítási pontok
koordináta rendszer: egy rögzített ponton átmenő annyi irányított egyenes, ahány dimenziós a tér

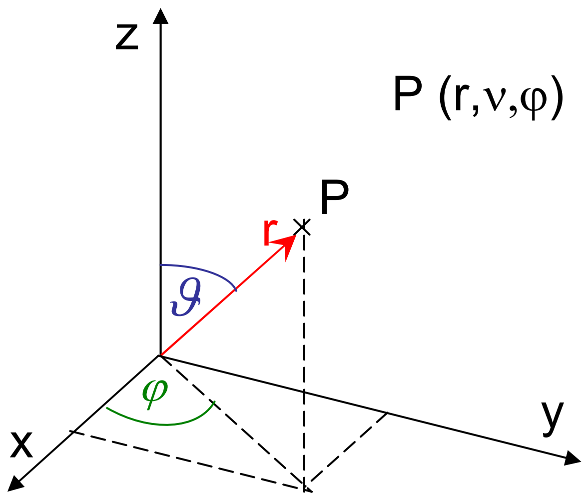
gyakorlatban: derékszögű koordináta rendszer
x – kelet, y – észak, z - fel

egy pont helyének megadása:

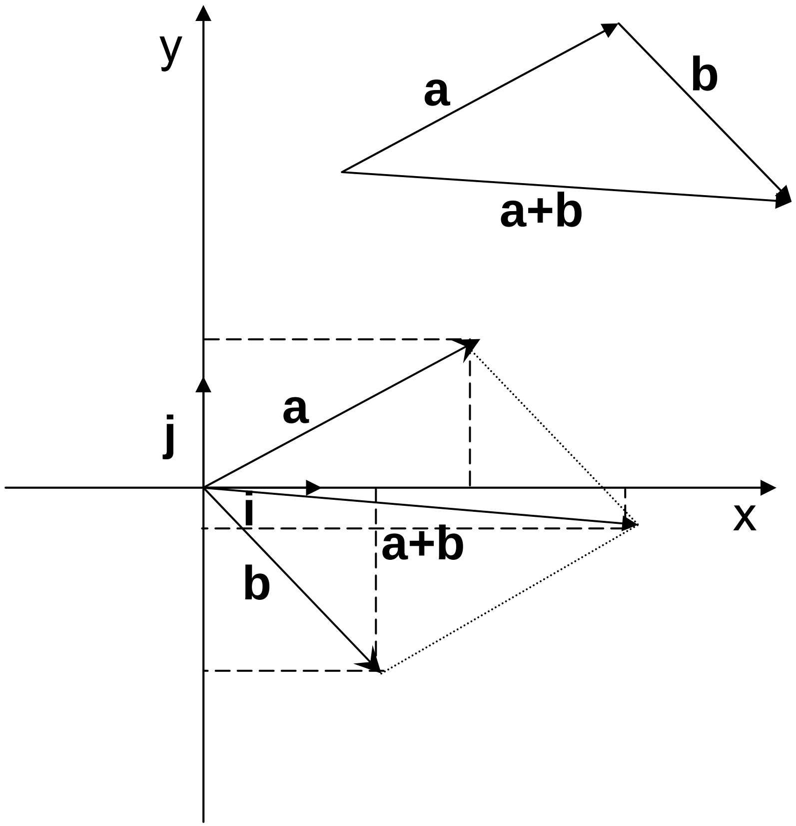
1. x,y,z koordinátákkal



2. polárkoordinátákkal



Vektorok derékszögű koordináta-rendszerben



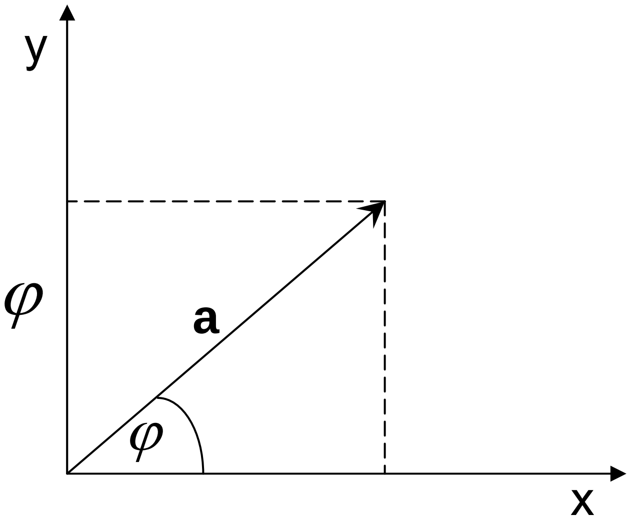
i, j: x, y irányú egységvektorok

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$$

$$\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}$$

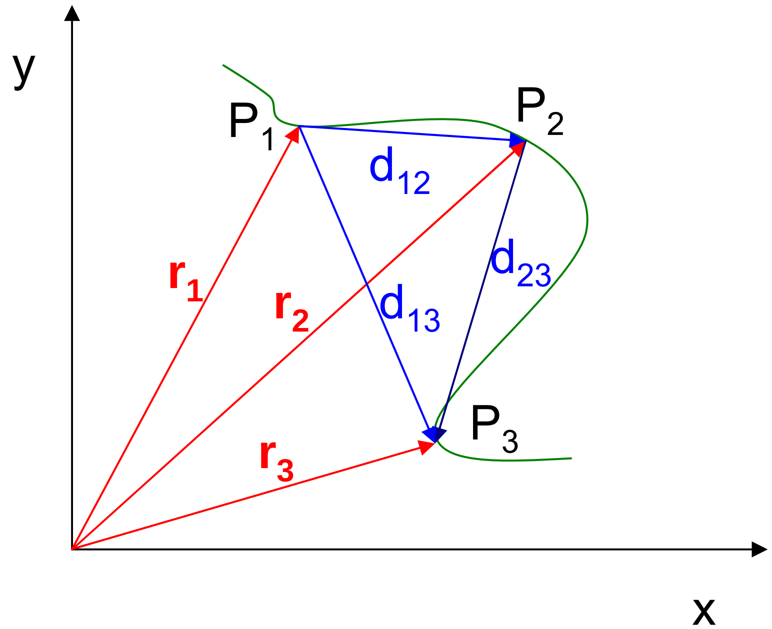
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j}$$

$$a_y = a \cdot \sin\varphi$$



$$a_x = a \cdot \cos\varphi$$

Példa: anyagi pont helyzete, elmozdulása

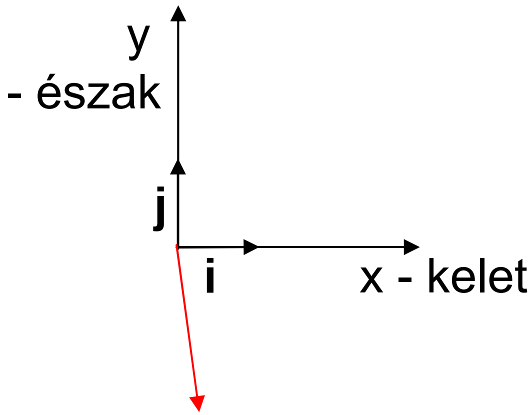


helyvektor

pálya → megtett út

elmozdulás

Feladat: Határozzuk meg annak az autónak az elmozdulását, amely 8km-t halad északkeleti irányban, majd dél felé 13km-t, végül pedig nyugatra 5km-t!



$$\mathbf{a} = 8\cdot\cos 45^\circ\,\mathbf{i} + 8\cdot\sin 45^\circ\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{b} = 0\mathbf{i} - 13\mathbf{j}$$

$$\mathbf{c} = -5\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (8\sin 45^\circ - 5)\mathbf{i} + (8\cos 45^\circ - 13)\mathbf{j} = 0,66\mathbf{i} - 7,34\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}| = \sqrt{0,66^2 + 7,34^2} = 7,37$$

Sebesség, szögsebesség, gyorsulás, szöggyorsulás

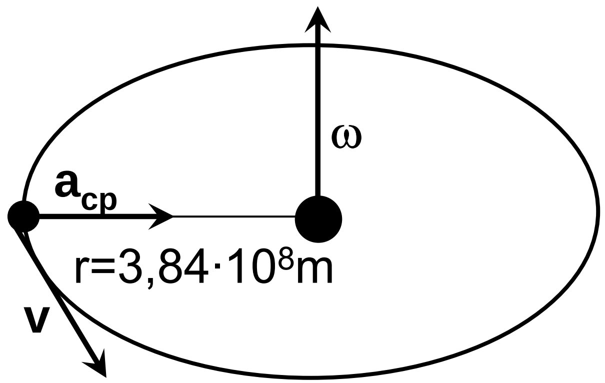
Feladat: Mekkora és milyen irányú a Hold Föld körüli keringésének sebessége, szögsebessége, gyorsulása és szöggyorsulása?

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2r\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}84 \cdot 10^8 m \cdot 3{,}14}{27{,}3 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 s} = 1020 \frac{m}{s}$$

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{27{,}3 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 s} = 2{,}66 \cdot 10^{-6} \frac{1}{s}$$

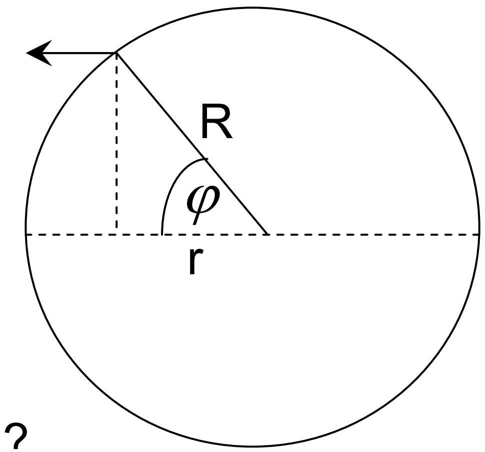
$$a_{cp} = r\omega^2 = \frac{v^2}{r} = 2{,}72 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s^2}$$

$$\beta = 0$$



Gyorsuló vonatkoztatási rendszerek – centrifugális erő

Feladat: A Földön hol legnagyobb a centrifugális erő?



Az Egyenlítőn:

$$F_{cf} = m\omega^2 r = m\omega^2 R\cos\varphi$$

Feladat: Mekkora a centrifugális erő nagysága az Egyenlítőn?

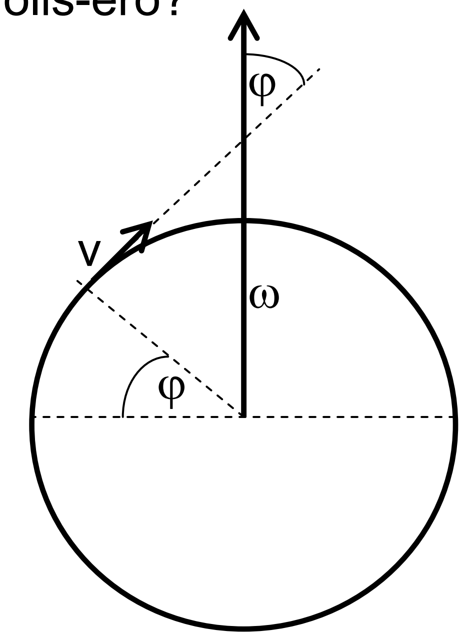
$$\varphi = 0$$

$$\mathbf{F_{cf}} = m\omega^2 \mathbf{r}$$

$$\frac{F_{cf}}{mg} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{(7,27\cdot 10^{-5} s^{-1})^2 \cdot 6378 km}{9,81 m/s^2} = 3,4\cdot 10^{-3}$$

Coriolis-erő

Feladat: Mekkora és milyen irányú a Szegedről Budapestre tartó, 80km/h sebességgel haladó, 400t tömegű vonatra ható Coriolis-erő?



$$v = 80\frac{km}{h} = 22,2\frac{m}{s}$$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{24óra} = 7,27\cdot 10^{-5}\frac{1}{s}$$

$$\varphi = 44^\circ$$

φ: az ábráról látszik, hogy ω és v által bezárt szög a földrajzi szélességgel egyenlő (44°)

$$F_{Cor} = 2\cdot m\cdot v\times\omega = 2\cdot m\cdot v\cdot\omega\cdot\sin\varphi =$$

$$= 2\cdot 4\cdot 10^5 kg\cdot 22,2\frac{m}{s}\cdot 7,27\cdot 10^{-5}\frac{1}{s}\cdot\sin 44^\circ = 898N$$

A vonatnak jobbra, azaz kelet felé mutat.

Geosztrófikus szél

Feladat: Két pontban mért légnyomás különbsége 23hPa, a pontok távolsága pedig 2100km. Milyen erős geosztrófikus szél alakul ki?

$$\frac{\Delta p}{\Delta y}\cdot V = 2m(v\times\omega) = 2\cdot\rho\cdot V\cdot v\cdot\omega\cdot\sin\varphi$$

$$v = \frac{\Delta p}{\Delta y}\cdot\frac{1}{2\cdot\rho\cdot\omega\cdot\sin\varphi} = \frac{\Delta p}{\Delta y}\cdot\frac{1}{\rho\cdot f}$$

f: Coriolis-paraméter

$$v = \frac{1}{2\cdot\omega\cdot\sin\varphi\cdot\rho}\cdot\frac{\Delta p}{\Delta y} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 7,27\cdot 10^{-5}\frac{1}{s}\cdot\sin 44^\circ\cdot 1,3\frac{kg}{m^3}}\cdot\frac{2300Pa}{2,1\cdot 10^6 km} = 8,34\frac{m}{s}$$

A koncentráció mértékegységei

%	10^{-2}
‰	10^{-3}
ppm	10^{-6}
ppb	10^{-9}
ppt	10^{-12}

mg/m^3
$\mu g/m^3$
ng/m^3

Feladat: Szobahőmérsékletű levegő ammóniatartalma 20 $\mu g/m^3$. Hány ppb-nek felel meg ez a koncentráció?

$$1\,ppb = \frac{10^{-9}\,m^3}{1m^3}$$

$$20\frac{\mu g}{m^3} = x\frac{m^3}{m^3}$$

$$pV = nRT$$

szobahőmérséklet
atmoszférikus nyomás

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{\frac{m}{M}RT}{p} = \frac{\dfrac{20\cdot10^{-6}\,g}{17\dfrac{g}{mol}}\cdot 8{,}314\dfrac{J}{mol\cdot K}\cdot 298K}{10^5\,Pa} = 2{,}9\cdot10^{-8}\,m^3$$

$$20\frac{\mu g}{m^3} = 2{,}9\cdot10^{-8}\frac{m^3}{m^3} = 29\,ppb = 0{,}029\,ppm = 29000\,ppt$$

Barometrikus nyomásformula

Feladat: Milyen magas a János-hegy, ha a hegy tetején a légnyomás 950hPa?

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{zMg}{RT}} = p_0 \cdot e^{-\frac{z}{H}}$$

$$p = 950hPa$$

$p_0 = 10^5 Pa$ pontosabban: $1{,}013 \cdot 10^5$Pa

$$M = 29\frac{g}{mol}$$

$$R = 8{,}314\frac{J}{mol \cdot K}$$

$$T = 25^o C = 298K$$

$$g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$$

$$H = 8km$$

$$z = ?$$

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{zMg}{RT}}$$

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{zMg}{RT}}$$

$$\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{zMg}{RT}$$

$$z = -\frac{RT}{Mg} \cdot \ln\frac{p}{p_0} =$$

$$= -\frac{8{,}314\frac{J}{molK} \cdot 293K}{29\frac{g}{mol} \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}} \cdot \ln\frac{950hPa}{1013hPa} = 541m$$

Szónikus anemométer működése - szélsebesség

Feladat: Egy szónikus anemométer két ultrahang adó-vevője közötti távolság 20 cm. Az ultrahang impulzus terjedési ideje az egyik irányban $5{,}84\cdot10^{-4}$ s, a másik irányban $5{,}98\cdot10^{-4}$ s. Mekkora a szélsebességnek az adó-vevőket összekötő szakasz irányába eső komponense? Közelítőleg mennyi a levegő hőmérséklete, ha a hang terjedési sebessége 0°C-os levegőben 331 m/s?

$d=20\text{cm}$

$t_1=5{,}84\cdot10^{-4}\text{s}$

$t_2=5{,}98\cdot10^{-4}\text{s}$

c: hangsebesség szélcsendben

v: szélsebesség

$$\frac{d}{t_1}=c+v$$

$$\frac{d}{t_2}=c-v$$

$$\frac{d}{t_1}-\frac{d}{t_2}=c+v-c-v=2v$$

$$v=\frac{d}{2}\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)=\frac{0{,}2m}{2}\left(\frac{1}{5{,}84\cdot10^{-4}s}-\frac{1}{5{,}98\cdot10^{-4}s}\right)=4\frac{m}{s}$$

Szónikus anemométer működése - hőmérséklet

d=20cm

$t_1=5{,}84\cdot 10^{-4}$s

$t_2=5{,}98\cdot 10^{-4}$s

c: hangsebesség szélcsendben

v: szélsebesség

$$\frac{d}{t_1}=c+v$$

$$\frac{d}{t_2}=c-v$$

$$c=\frac{d}{t_1}-v=\frac{0{,}2m}{5{,}84\cdot 10^{-4}s}-4\frac{m}{s}=338\frac{m}{s}$$

$$\frac{c}{c_0}=\sqrt{\frac{T}{T_0}}$$

c_0=331m/s (0°C-on mért hangsebesség)

T_0=0°C=273K

$$T=\left(\frac{c}{c_0}\right)^2\cdot T_0=\left(\frac{338\frac{m}{s}}{331\frac{m}{s}}\right)^2\cdot 273K=284{,}5K=11{,}5^oC$$

Venturi-cső

Feladat: Mekkora sebességgel áramlik a Venturi-csőben egy 1,962kg/m^3 sűrűségű gáz, ha a Venturi cső 0,3 és 0,2m átmérőjű szakaszai között 590Pa nyomáskülönbséget mérünk?

Bernoulli-egyenlet

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \cancel{\rho g h_1} = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \cancel{\rho g h_2} \qquad h_1 = h_2$$

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{r_1^4}{r_2^4}v_1^2 - v_1^2\right)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\cdot\Delta p}{\rho\cdot\left(\frac{r_1^4}{r_2^4} - 1\right)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 590Pa}{1{,}962\frac{kg}{m^3}\cdot\left(\frac{(0{,}15m)^4}{(0{,}1m)^4} - 1\right)}} = 12{,}15\frac{m}{s}$$

$$Q = A_1\cdot v_1 = r_1^2\pi\cdot v_1 = (0{,}15m)^2\cdot\pi\cdot 12{,}15\frac{m}{s} = 0{,}85\frac{m^3}{s}$$

kontinuitási egyenlet

$$A_1\cdot v_1 = A_2\cdot v_2 \quad =Q$$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2}v_1 = \frac{r_1^2\pi}{r_2^2\pi}v_1 = \frac{r_1^2}{r_2^2}v_1$$

Pitot-cső

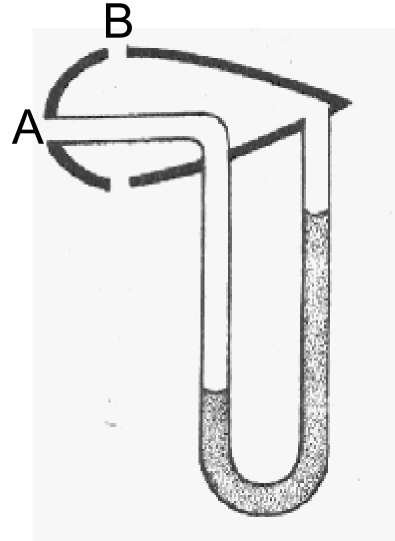
Feladat: Szélsebességet mérünk Pitot-csővel. Mekkora a szélsebesség, ha a vízszintek különbsége a csőben 8cm?

$$p_A + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_A^2} + \cancel{\rho g h_A} = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \cancel{\rho g h_B}$$

$$h_A = h_B$$

$$v_A = 0$$

$$v = v_B = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(785Pa)}{1,3\frac{kg}{m^3}}} = 34,75\frac{m}{s}$$



Reynolds-szám

Feladat: Egy 5 mm átmérőjű csőben levegő áramlik 5 l/perc sebességgel. Lamináris vagy turbulens az áramlás?

$$\eta = 1{,}88 \cdot 10^{-5}\, Pa \cdot s$$

$$Q = 5\frac{l}{perc} = 8{,}3 \cdot 10^{-5}\frac{m^3}{s} \qquad v = \frac{Q}{r^2\pi} = \frac{8{,}3 \cdot 10^{-5}\frac{m^3}{s}}{(2{,}5 \cdot 10^{-3} m)^2 \cdot 3{,}14} = 4{,}24\frac{m}{s}$$

$$r = 2{,}5 \cdot 10^{-3} m$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \cdot v \cdot L}{\eta} = \frac{\rho \cdot v \cdot r}{\eta} = \frac{1{,}3\frac{kg}{m^3} \cdot 4{,}24\frac{m}{s} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3} m}{1{,}88 \cdot 10^{-5}\, Pa \cdot s} = 734$$

Az áramlás lamináris.

Reynolds-szám

Feladat: Egy 5 mm átmérőjű golyó halad levegőben 4,24 m/s sebességgel. Lamináris vagy turbulens az áramlás?

$$\eta = 1,88 \cdot 10^{-5}\, Pa \cdot s$$

$$v = 4,24 \frac{m}{s}$$

$$r = 2,5 \cdot 10^{-3}\, m$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \cdot v \cdot L}{\eta} = \frac{\rho \cdot v \cdot r}{\eta} = \frac{1,3 \frac{kg}{m^3} \cdot 4,24 \frac{m}{s} \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}\, m}{1,88 \cdot 10^{-5}\, Pa \cdot s} = 734$$

Az áramlás lamináris.

Közegellenállás

Feladat: Mekkora közegellenállási erő hat az előző feladatban szereplő golyóra?

$$F_K = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$$ Stokes törvény (Re<1000)

$$F_K = \frac{1}{2} c_e \cdot \rho_l \cdot A \cdot v^2$$ négyzetes közegellenállási törvény (Re>2000)

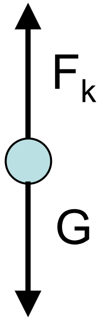
$$F_K = 6\pi\eta r v = 6 \cdot 3,14 \cdot 1,88 \cdot 10^{-5}\, Pa \cdot s \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}\, m \cdot 4,24 \frac{m}{s} = 3,75 N$$

Közegellenállás

Feladat: Mekkora sebességre gyorsul fel esés közben egy 1cm sugarú jégdarab?

$$F_k = 6\pi\eta R v$$ Stokes-törvény

$$F_k = c_e \frac{1}{2}\rho_l A v^2$$ négyzetes ellenállási törvény



F_k nő a sebességgel → addig gyorsul a jégdarab, amíg egyenlő nem lesz a közegellenállási erő a gravitációs erővel

$$G = F_k$$

$$m \cdot g = c_e \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_l \cdot A \cdot v^2$$

$$m \cdot g = c_e \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_l \cdot r^2\pi \cdot v^2$$

$$\frac{4r^3\pi}{3}\rho_j \cdot g = c_e \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_l \cdot r^2\pi \cdot v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{4r}{3} \cdot \rho_j \cdot g \cdot \frac{2}{c_e \cdot \rho_l}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4 \cdot 0,01m}{3} \cdot 900\frac{kg}{m^3} \cdot 9,81\frac{m}{s^2} \cdot \frac{2}{0,47 \cdot 1,2\frac{kg}{m^3}}} = 19,6\frac{m}{s}$$

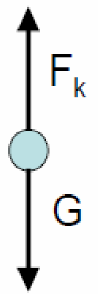
Csak akkor használhatjuk a négyzetes ellenállási törvényt, ha turbulens az áramlás

$$Re = \frac{\rho_l v r}{\eta} = \frac{1,2\frac{kg}{m^3} \cdot 19,6\frac{m}{s} \cdot 0,01m}{1,88 \cdot 10^{-5} Pa \cdot s} = 13553$$

Re>2000 – turbulens áramlás, tehát jó a megoldásunk

Aeroszolok ülepedési sebessége

Feladat: Mekkora egy 10μm sugarú jégrészecske ülepedési sebessége?



$F_k = 6\pi\eta R v$ Stokes-törvény

$F_k = c_e \frac{1}{2} \rho_l A v^2$ négyzetes ellenállási törvény

F_k nő a sebességgel → addig gyorsul a jégdarab, amíg egyenlő nem lesz a közegellenállási erő a gravitációs erővel

$$G = F_k$$

$$m \cdot g = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$$

$$\frac{4r^3\pi}{3}\rho_j \cdot g = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$$

$$v = \frac{2 \cdot r^2 \cdot \rho_j \cdot g}{9 \cdot \eta} = 0,01\frac{m}{s}$$

Csak akkor használhatjuk a Stokes-törvényt, ha lamináris az áramlás

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_l v r}{\eta} = \frac{1,3\frac{kg}{m^3} \cdot 0,01\frac{m}{s} \cdot 10 \cdot 10^{-6} m}{1,88 \cdot 10^{-5} Pa \cdot s} = 0,0069$$

↓

Re<1000 – lamináris áramlás, tehát jó a megoldásunk