Kísérleti fizika I.

levelező tagozat

Dr. Czirjákné Csete Mária

Dr. Kovács Attila

a.p.kovacs@physx.u-szeged.hu

Követelmények

Részvétel az előadáson: nem kötelező

Vizsgára bocsáthatóság feltétele: nincs

Vizsgáztatás módja: írásban

Tételsor: előadó által kiadva

Irodalom

- Dr. Michailovits Lehel, *Fizika* (JATEPress, Szeged, 1999)
- Dr. Szabó Gábor, *A fizika mennyiség fogalma; idő és hosszúság*, (SZTE, oktatási segédanyag)
- Dr. Pacher Pál, *Fizika* (BMGE, kézirat)
- Budó Ágoston, *Kísérleti fizika 1.* (Tankönyvkiadó, Budapest)

Tematika

- Mechanika
  - Anyagi pont
  - Pontrendszer
  - Merev test
  - Deformálható test
- Rezgések és hullámok
- Optika
  - Geometriai optika
  - Fizikai optika

1. tétel

- Fizikai alapmennyiségek és mérésük
- Az SI mértékegységrendszer

A fizikai mennyiség

<u>A fizika alapvető feladata:</u>

mennyiségi összefüggések megfogalmazása

A fizikai objektumok, folyamatok kísérletileg vizsgálható tulajdonságainak leírására **fizikai mennyiségek bevezetése**

fizikai mennyiség = számérték és mértékegység szorzata

$$h = 5 \cdot \mathrm{m}$$

Dr. Szabó G.: *A fizika mennyiség fogalma; idő és hosszúság* c. munkája alapján

Mértékegység

Mértékegység:
az azonos fajtájú mennyiségek halmazából kiválasztott vonatkoztatási mennyiségérték

Etalon:
valamely mennyiség mértékegységét reprodukálható módon megtestesítő mérőeszköz

Mértékegységrendszer:
néhány alapmértékegység és az ezekből meghatározott elvek szerint származtatott mértékegységek összessége

Az SI rendszer alapmennyiségei

- tömeg
- hosszúság
- idő
- ~~elektromos töltés~~
- elektromos áramerősség

4 db független alapmennyiség

könnyebben mérhető

- hőmérséklet
- fényerősség
- anyagmennyiség

3 db nem független mennyiség, de praktikus volt a bevezetésük

Az SI rendszer alapmennyiségei és alapegységei

SI alapmennyiség neve	alapmennyiség jele	alapegység neve	alapegység jele
idő	t, τ	másodperc (szekundum)	s
hosszúság	l, L	méter	m
tömeg	m	kilogramm	kg
elektromos áramerősség	I	amper	A
hőmérséklet	T, θ	kelvin	K
fényerősség	I_v	kandela	cd
anyagmennyiség	n	mól	mol

Alapegységek definíciói

méter:
annak az útnak a hosszúsága, amelyet a fény vákuumban 1/299 792 458-ad másodperc alatt tesz meg (1983.)

másodperc:
az alapállapotú cézium-133 atom két hiperfinom energiaszintje közötti átmenetnek megfelelő sugárzás 9 192 631 770 periódusának időtartama

kilogramm:
a Párizs melletti Sevres-ben őrzött platina és irídium ötvözetből készült hengernek, a nemzetközi kilogramm etalonnak (őskilogramm) a tömege

$\Delta t = 10 \text{min}$

Prefixumok

prefixum: előtétszó, előtag

- nagyon nagy vagy nagyon kicsi mennyiségek rövid leírására
- a tíz hárommal osztható kitevőjű hatványainak rövidítésére használatosak leginkább

Előtag	Jele	Szorzó	
		hatvánnyal	számnévvel
yotta-	Y	10^{24}	kvadrillió
zetta-	$\boxed{Z}$	10^{21}	trilliárd
exa-	**E**	10^{18}	trillió
peta-	**P**	10^{15}	billiárd
tera-	**T**	10^{12}	billió
giga-	**G**	10^{9}	milliárd
mega-	**M**	10^{6}	millió
kilo-	**k**	10^{3}	ezer
–	–	10^{0}	egy
milli-	**m**	10^{-3}	ezred
mikro-	**µ**	10^{-6}	milliomod
nano-	**n**	10^{-9}	milliárdod
piko-	**p**	10^{-12}	billiomod
femto-	**f**	10^{-15}	billiárdod
atto-	**a**	10^{-18}	trilliomod
zepto-	z	10^{-21}	trilliárdod
yocto-	y	10^{-24}	kvadrilliom

2. tétel

- Anyagi pont kinematikájának alapfogalmai
  - vonatkoztatási rendszer
  - sebesség
  - gyorsulás
- Alapvető mozgásfajták

Az anyagi pont kinematikája

Anyagi pont, tömegpont:

tömeggel rendelkező kiterjedés nélküli idealizált test

Ha a test méretei elhanyagolhatóan kicsinyek a mozgás során fellépő távolságokhoz képest és a test saját tengely körüli forgása elhanyagolható, akkor a testet anyagi ponttal modellezhetjük.

Kinematika:

- a testek mozgásának leírásával foglalkozik
- nem vizsgálja azt, hogy mi hozta létre az adott mozgást

Az anyagi pont kinematikája

A mozgás kinematikai leírása céljából bevezetendő fogalmak:

- anyagi pont **helye**
- anyagi pont **sebessége**
- anyagi pont **gyorsulása**

Az anyagi pont mozgásának kinematikai leírása:

Megadjuk az anyagi pontnak egy másik testhez viszonyított

- helyét,
- sebességét,
- gyorsulását

az idő függvényében.

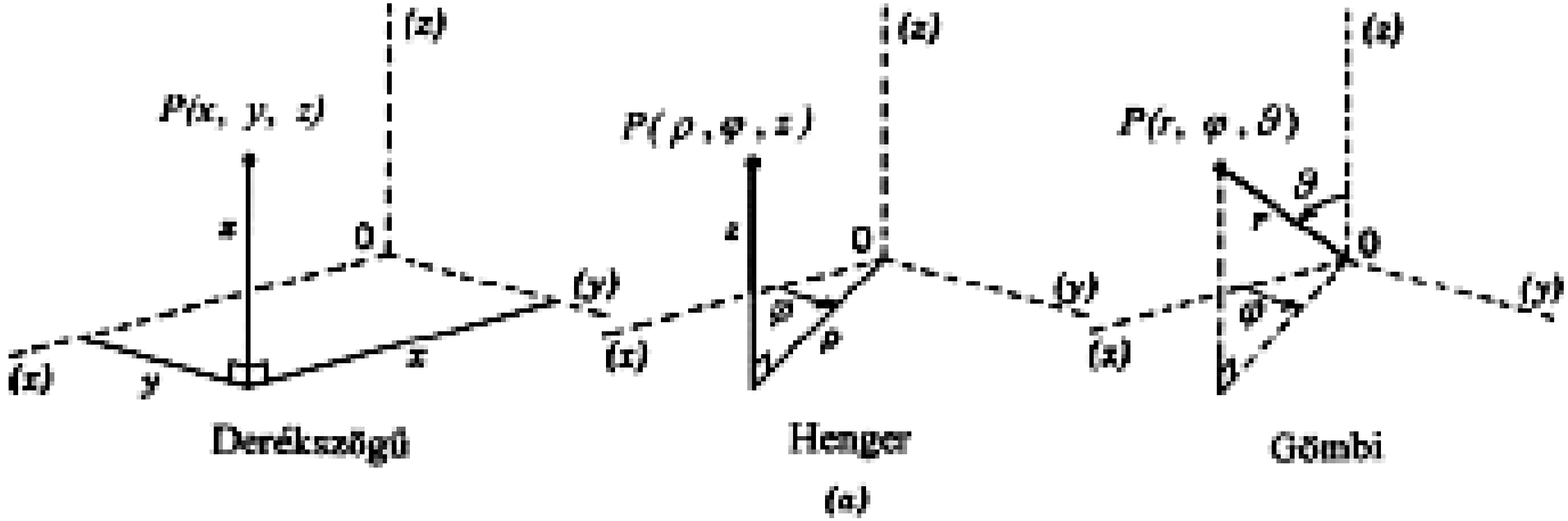
Az anyagi pont kinematikája

Vonatkoztatási rendszer:
azon test vagy testek összessége, amely(ek)hez az anyagi pont mozgását viszonyítjuk

Az anyagi pont helyzetének számszerű jellemzése

Koordináta-rendszer:
a vonatkoztatási rendszerhez rögzített azon pontok, vonalak vagy felületek, amelyektől az anyagi pont távolságait számítjuk

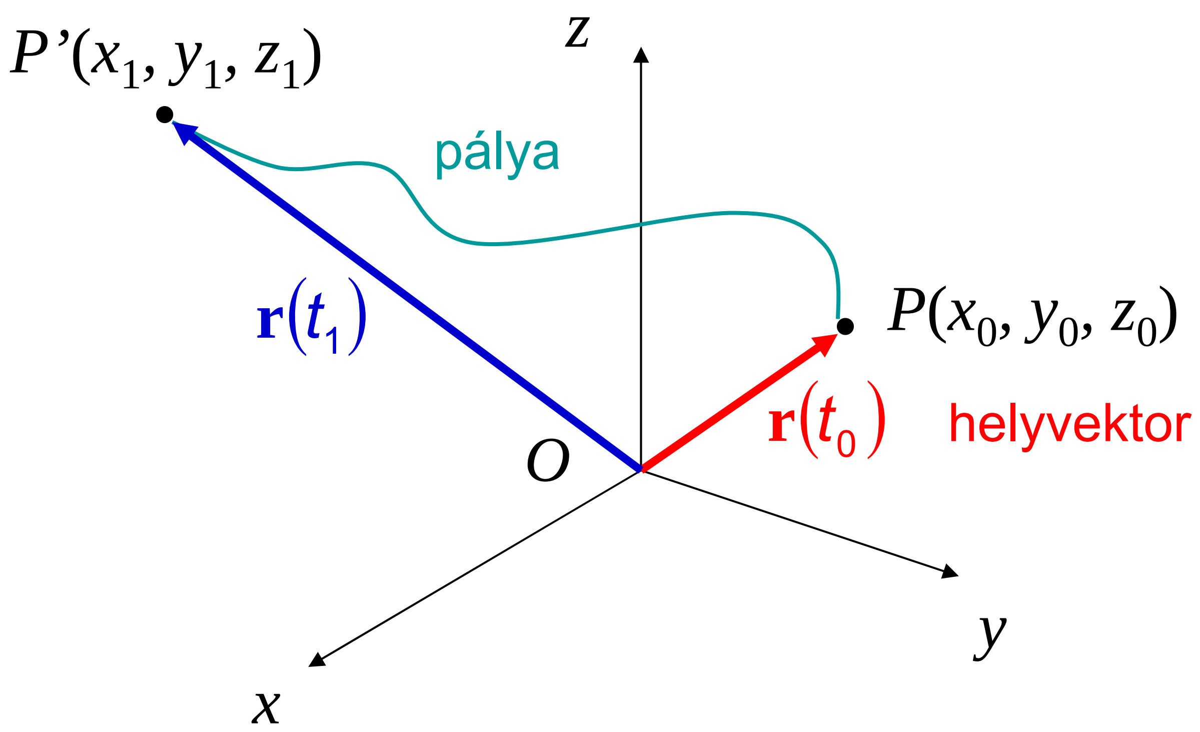
Koordináta-rendszerek



Az anyagi pont mozgását akkor ismerjük, ha a pont helyét bármely *t* időpillanatban meg tudjuk mondani, azaz ha meg tudjuk adni a pont - pl. derékszögű- koordinátáit mint az idő függvényét:

$$x = f_1(t) \qquad y = f_1(t) \qquad z = f_1(t)$$

Anyagi pont pályája

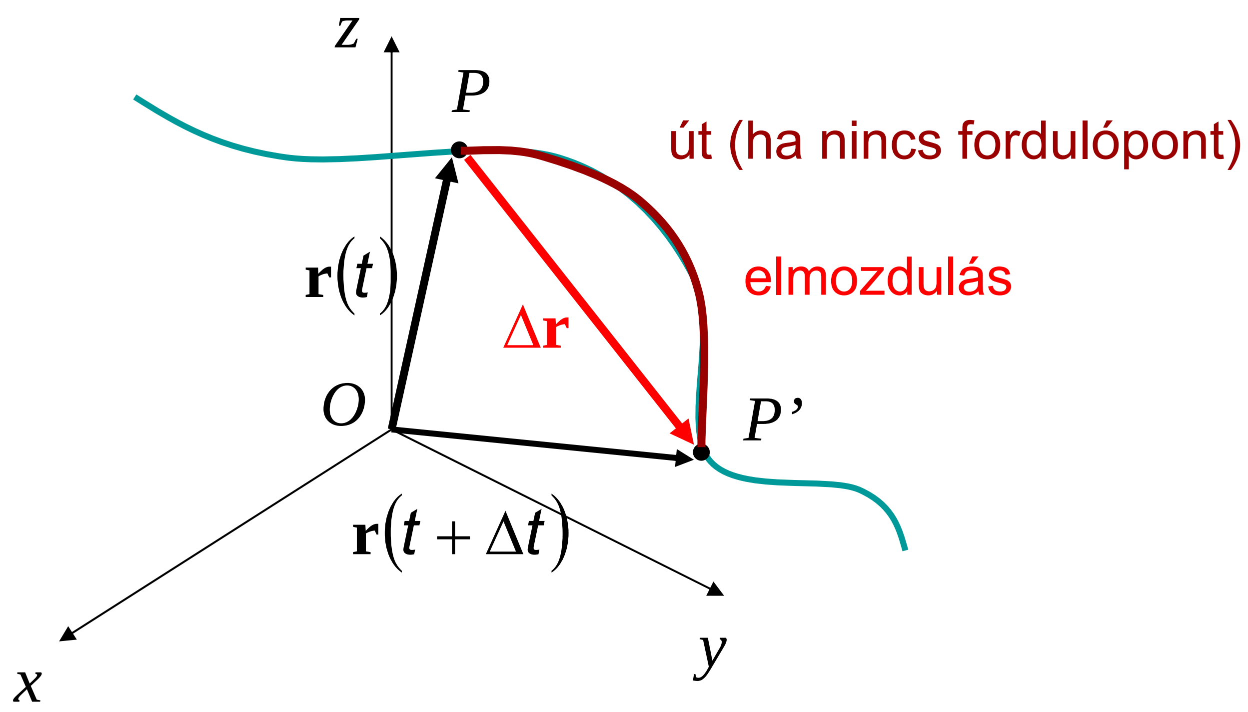


Pálya: a mozgó pont által leírt görbe

Az anyagi pont mozgása kinematika szempontból meg van határozva, ha ismerjük $\mathbf{r}$-t mint az idő függvényét:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

Anyagi pont sebessége



(pillanatnyi) sebesség:

az $\mathbf{r}$ helyvektor idő szerinti differenciálhányadosa

$$\vec{v}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}(t)$$

Anyagi pont sebessége

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\,\vec{e}_t = v\,\vec{e}_t$$

$\vec{e}_t$: a pálya érintője irányába mutató (tangenciális) egységvektor

$\dot{s} = |\vec{v}| = v$: a sebesség vektor abszolút értéke, a sebesség nagysága

a sebességvektor mindig a pálya érintője irányába mutat

a sebesség származtatott mennyiség
SI mértékegysége: méter per másodperc, jele: m/s.

Anyagi pont koordinátái

Ha ismerjük az anyagi pont helyzetét valamilyen t_0 kezdeti időpontban, akkor egy tetszőleges későbbi t időpontbeli helyzetét a sebesség idő szerint integrálásával kapjuk:

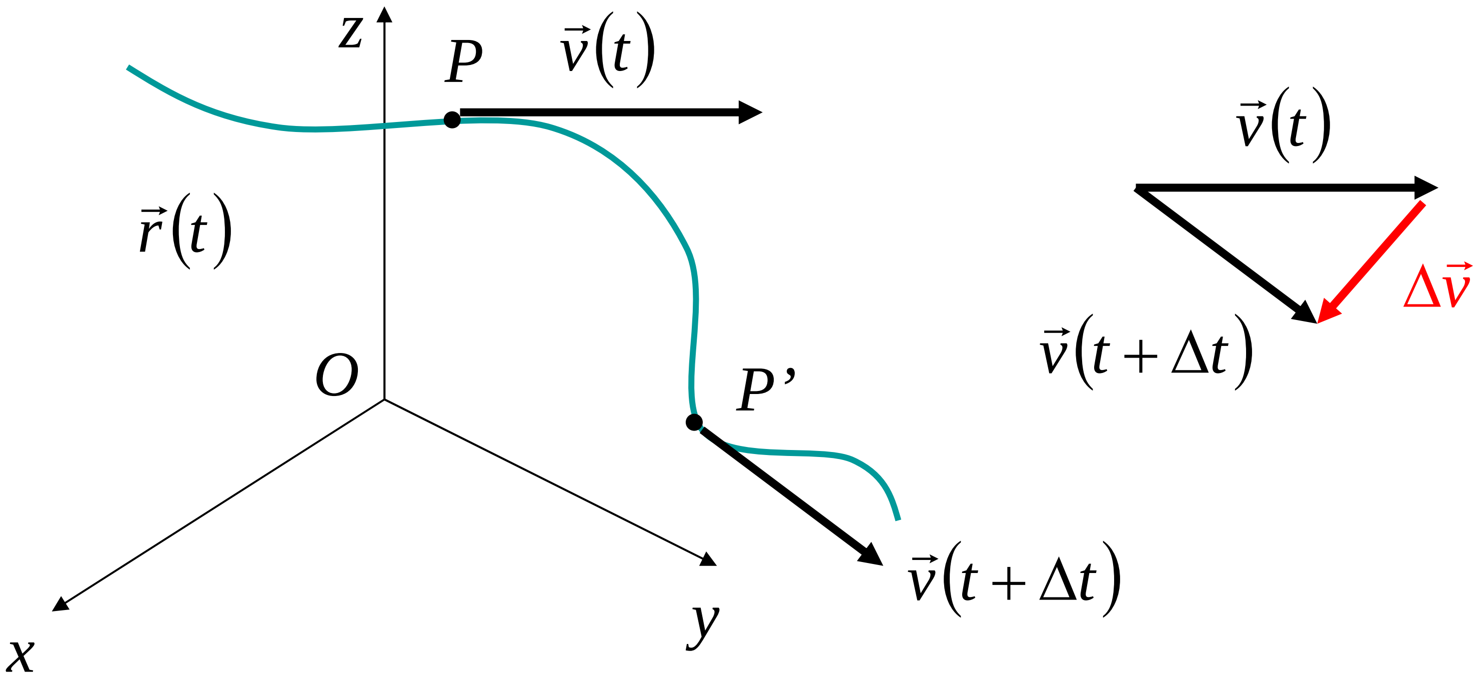
$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')\, dt'$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x(t')\, dt'$$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} v_y(t')\, dt'$$

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} v_z(t')\, dt'$$

Anyagi pont gyorsulása



$$\vec{a}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}(t)$$

(pillanatnyi) gyorsulás:
a sebességvektornak az idő szerinti differenciálhányadosa, azaz a helyzetvektornak az idő szerinti második deriváltja.

Anyagi pont sebessége

Ha ismerjük az anyagi pont sebességét valamilyen t_0 kezdeti időpontban, akkor egy tetszőleges későbbi t időpontbeli sebességét a gyorsulás idő szerint integrálásával kapjuk:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')\, dt'$$

$$v_x(t) = v_{x0} + \int_{t_0}^{t} a_x(t')\, dt'$$

$$v_y(t) = v_{y0} + \int_{t_0}^{t} a_y(t')\, dt'$$

$$v_z(t) = v_{z0} + \int_{t_0}^{t} a_z(t')\, dt'$$

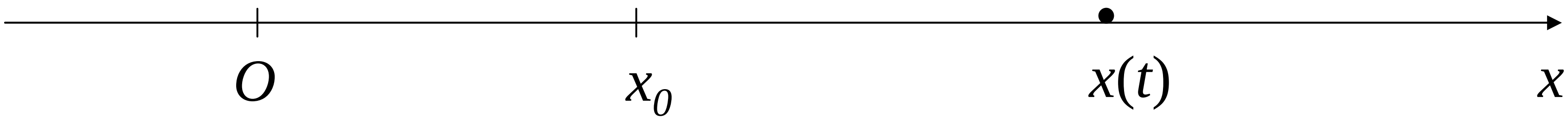
Alapvető mozgásfajták

- Egyenes vonalú egyenletes mozgás
- Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás
- Hajítás
- Egyenletes körmozgás
- Egyenletesen változó körmozgás
- Harmonikus rezgőmozgás

Egyenes vonalú egyenletes mozgás

~t végez az anyagi pont akkor, ha
- egyenes vonalú pályán
- állandóan ugyanabban az irányban halad
- egyenlő időközök alatt – bármilyen kicsik is ezek – egyenlő utakat tesz meg.

Az út-idő függvény: $s = v \cdot t$



$$x = v_0 \cdot t + x_0$$

$$s = x - x_0 = v_0 \cdot t$$

$$v = v_0$$

$$a = 0$$

Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás

~t végez az anyagi pont akkor, ha

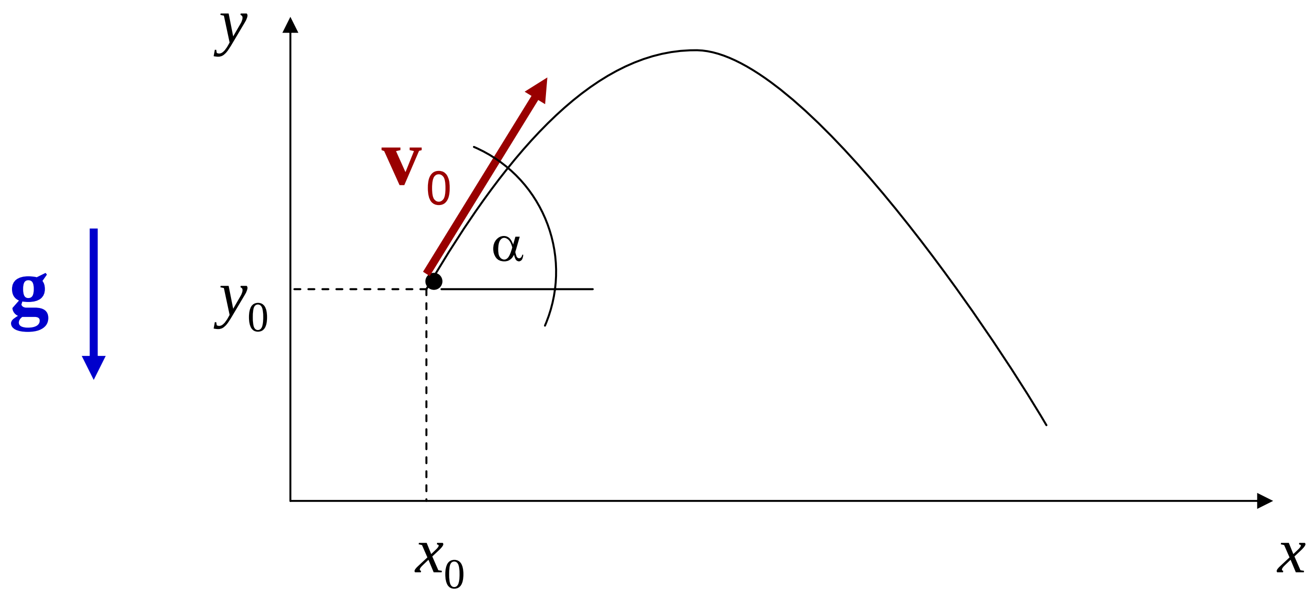
- egyenes vonalú pályán mozog
- sebességének nagysága egyenlő időközök alatt – bármilyen kicsik is ezek – mindig ugyanannyival változik.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \acute{a}lland\acute{o}$$

$$v = a \cdot t + v_0$$

$$x = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

Hajítás



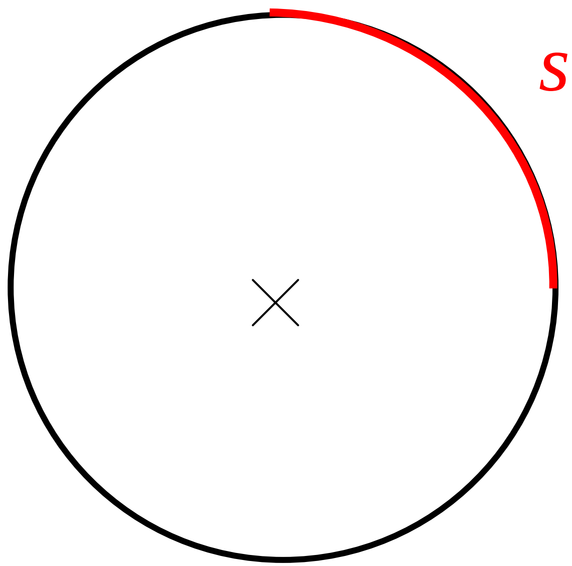
$$a_x(t) = 0, \qquad a_y(t) = -g$$

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha \quad , \qquad v_y(t) = v_0 \sin\alpha \; - g \cdot t$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cos\alpha \; \cdot t \;\; , \;\; y(t) = y_0 + v_0 \sin\alpha \; \cdot t - \tfrac{1}{2} g \cdot t^2$$

Egyenletes körmozgás

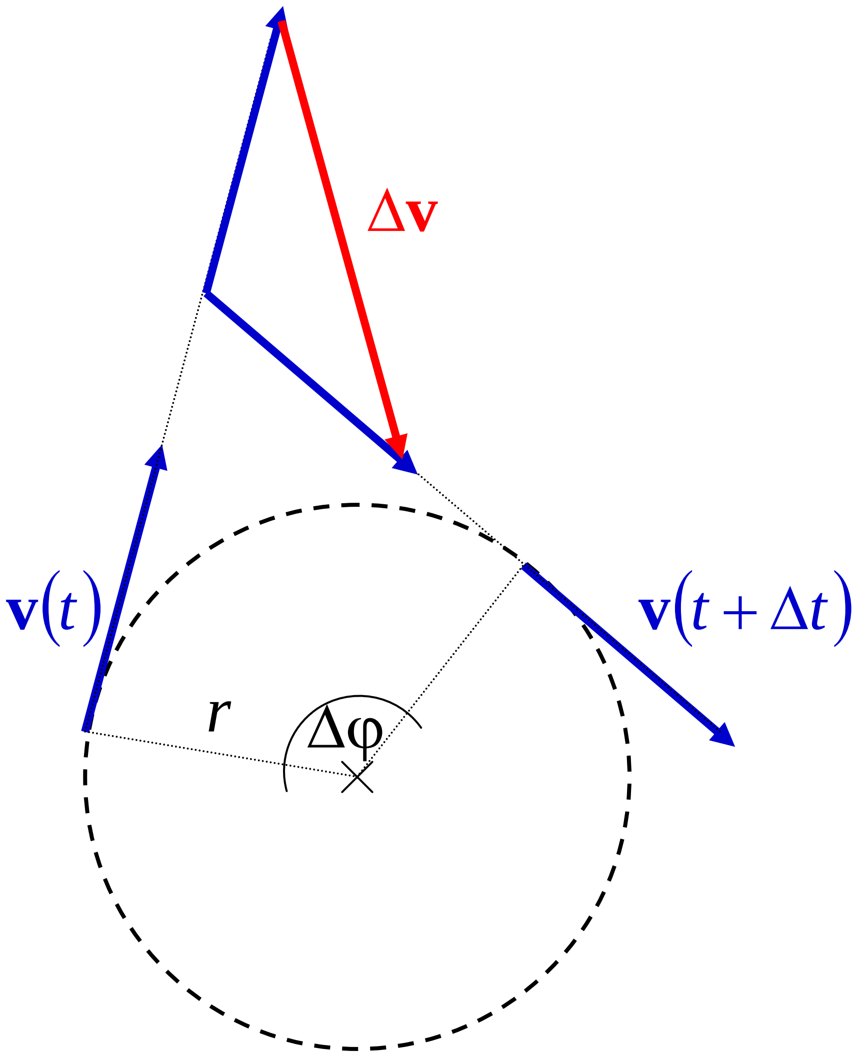
~-t végez az anyagi pont akkor, ha
- körpályán
- egyenlő időközök alatt – bármilyen kicsinyek is ezek – egyenlő – utakat tesz meg
- mindig ugyanabban a körülfutási irányban.



$$s = v \cdot t$$

v: kerületi sebesség

Egyenletes körmozgás



$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \neq 0$$

centripetális gyorsulás:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r}$$

a kör középpontja felé mutat

érintő irányú gyorsulás:

$$a_e = 0$$

szögsebesség:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r}$$

Egyenletesen változó körmozgás

A körmozgás egyenletesen változó, ha a test szögsebessége egyenlő idők alatt mindig ugyanannyival változik, bármekkorák is ezek az időközök

szöggyorsulás:

$$\beta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \acute{a}lland\acute{o}$$

$$\omega = \beta \cdot t + \omega_0$$

$$\varphi = \frac{\beta}{2} \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0$$

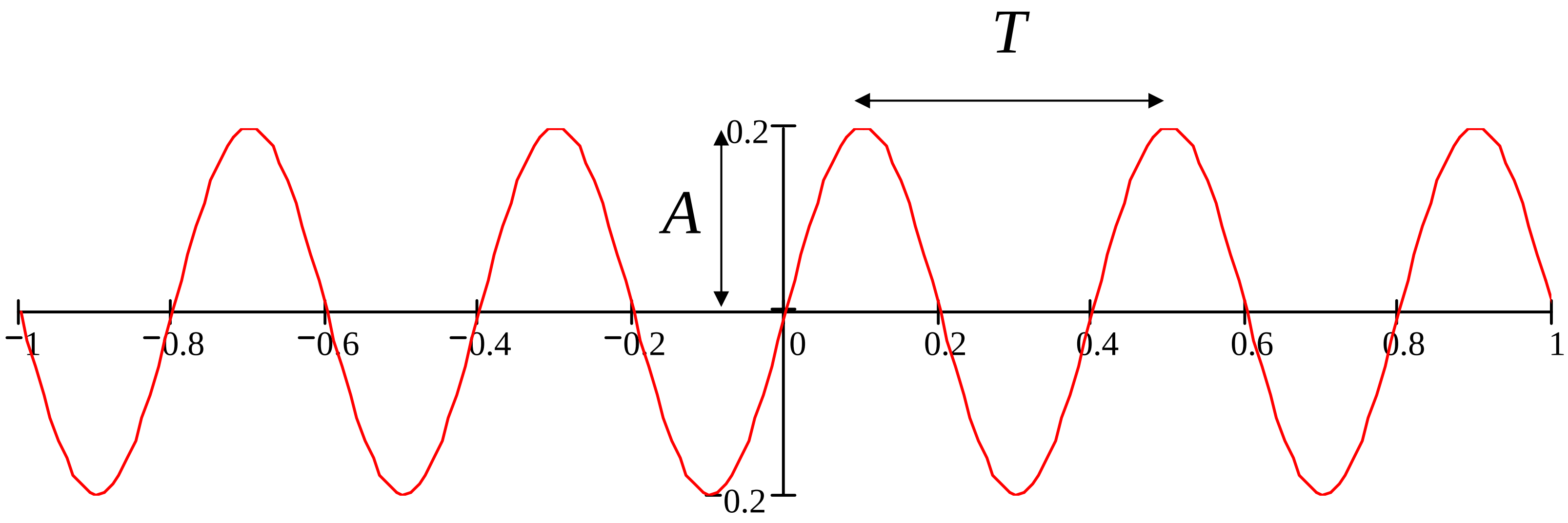
$$a_e(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = r\beta$$

$$a = \sqrt{a_e^2 + a_{cp}^2}$$

Harmonikus rezgőmozgás

A mozgás harmonikus rezgőmozgás, ha a test kitérése az időnek harmonikus (szinuszos vagy koszinuszos) függvénye.

$$x = A\,sin(\omega t + \alpha_0)$$



T: periódusidő

A: amplitudó

Harmonikus rezgőmozgás

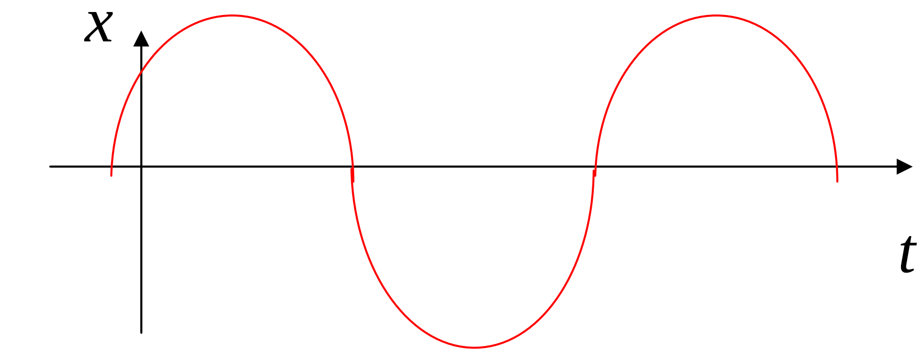
$$x = A\sin\big(\underbrace{\omega t + \alpha_0}_{\text{pillanatnyi fázisszög}}\big)$$

amplitudó körfrekvencia kezdőfázis

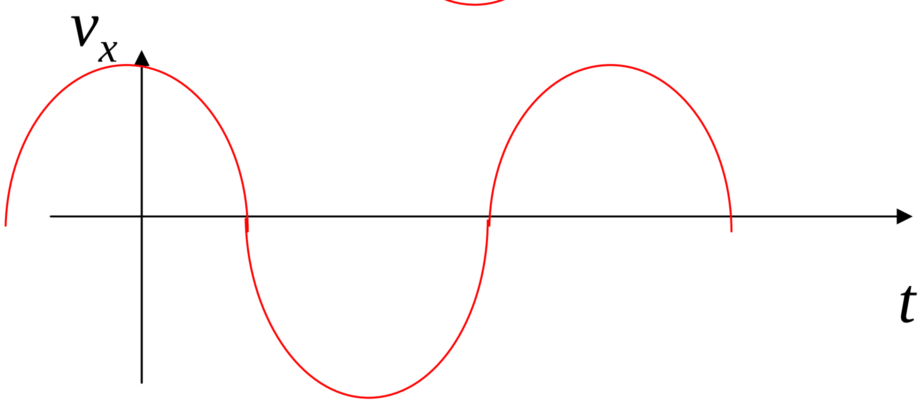
körfrekvencia: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

frekvencia: $n = \dfrac{1}{T}$

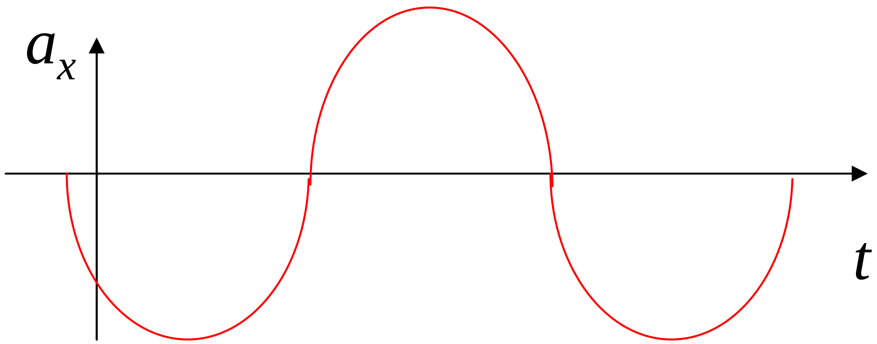
Harmonikus rezgőmozgás



$$x = A\,sin(\omega t + \alpha_0)$$



$$v_x = A\omega\,cos(\omega t + \alpha_0)$$



$$a_x = -A\omega^2\,sin(\omega t + \alpha_0)$$

Δt=25min

3. tétel

A dinamika axiómái.

- A tehetetlenség törvénye.
- Newton II. és III. axiómái.
- Az erőhatások függetlenségének elve

Newton I. axiómája, a tehetetlenség törvénye

Van olyan vonatkoztatási rendszer, az **inerciarendszer**, melyben minden test megtartja nyugalmi állapotát vagy egyenes vonalú egyenletes mozgását mindaddig, amíg más testek ennek megváltoztatására nem kényszerítik.

Az inerciarendszerhez képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző vonatkoztatási rendszerek szintén inerciarendszerek.

<u>tehetetlenség</u>:

a testeknek az I. axiómával kimondott tulajdonsága

Newton II. axiómája

Pontszerű test inerciarendszerhez viszonyított **v** sebessége változik, azaz a testnek gyorsulása van

Newton I. axiómája

más testek hatnak rá

Erő (erőhatás):

A testeknek egy más testre gyakorolt olyan hatása, amely e test sebességének megváltozásban, a test gyorsulásában nyilvánul meg

Erők típusai: pl.

izomerő
nehézségi erő
rugalmas erő
súrlódási erő

Newton II. axiómája

Egy pontszerű test $\mathbf{a}$ gyorsulása egyenesen arányos a testre ható, a gyorsulással azonos irányúnak választott $\mathbf{F}$ erővel, és fordítva arányos a test *m* tömegével:

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}}$$

- Newton II. axiómája alapján eldönthető, hogy egy vonatkoztatási rendszer inerciarendszer vagy nem.
- Egy meghatározott vonatkoztatási rendszer akkor tekinthető inerciarendszernek, ha benne egy test mozgásának az egyenes vonalú mozgástól való eltérését vissza tudjuk vezetni más testek hatására.
- Gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben ez nem lehetséges.

Newton III. axiómája, a kölcsönhatás törvénye

A test gyorsul

$\Downarrow$ Newton I. axiómája

B test hat rá

$\Downarrow$ Newton II. axiómája

$$\mathbf{F}_{A,B} = m\mathbf{a}_A$$

$\Downarrow$

Mi történik a ***B*** testtel?

Newton III. axiómája, a kölcsönhatás törvénye

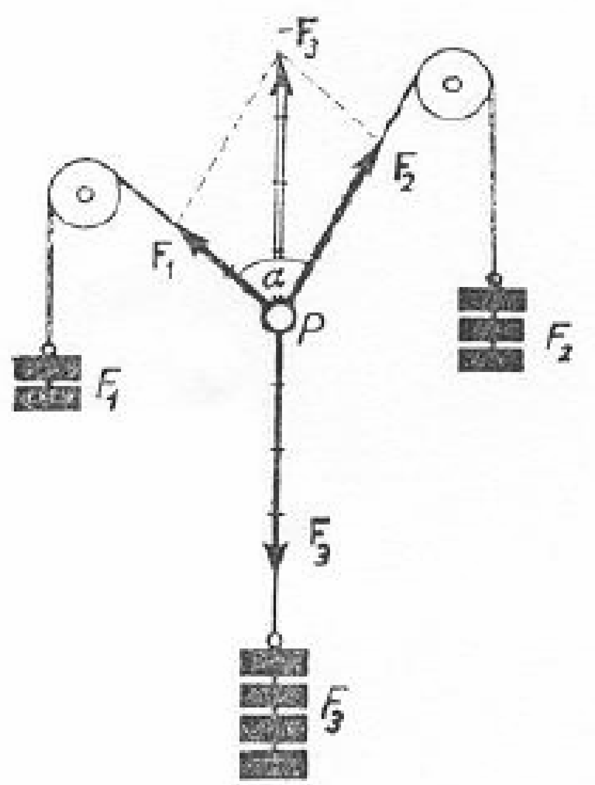
Ha egy (pontszerű) *A* testre a (pontszerű) *B* test erőt ($\mathbf{F}_{\mathrm{A,B}}$) gyakorol, akkor az *A* test is hat a *B*-re ugyanolyan nagyságú, de ellentétes irányú erővel:

$$\boxed{\mathbf{F}_{B,A} = -\mathbf{F}_{A,B}}$$

$$\Downarrow$$

Az erők mindig párosával lépnek fel, de különböző testekre hatnak

Stevin tétele (IV. axióma)
Az erőhatások függetlenségének elve



Két, ugyanabban a pontban ható erő helyettesíthető egyetlen, az ismert paralelogramma-szerkesztéssel meghatározott erővel.

Az erő vektormennyiségnek tekinthető

Stevin tétele (IV. axióma)
Az erőhatások függetlenségének elve

Az ugyanabban a pontban támadó erők vektorokként adhatók össze, és bonthatók fel

Ha ugyanarra az anyagi pontra egyidejűleg több erő hat ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, …), ezek együttes hatása egyenlő vektori eredőjük ($\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots = \mathbf{F}$) hatásával.

Az anyagi pont egyensúlyának szükséges és elegendő feltétele, hogy a pontra ható összes erők eredője zérus legyen.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = \mathbf{0}}$$

Δt=10min

4. tétel

- A dinamika alapegyenlete
- Fontosabb erőtörvények
- A mozgásegyenlet megoldása

A dinamika alapegyenlete

A dinamika alapegyenlete: II. axióma + IV. axióma

Egy pontszerű test tömegének és (inerciarendszerre vonatkoztatott) gyorsulásának szorzata egyenlő a testre ható összes erők eredőjével:

$$m\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i$$

A mozgások kísérleti vizsgálata alapján erőtörvények felállítása

A testre ható erők ismeretében a test mozgásának meghatározása

Fontosabb erőtörvények

A mozgások kísérleti vizsgálata alapján erőtörvények felállítása

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$ ismert mérések alapján

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

<u>erőtörvény:</u> a mozgások egész osztályára jellemző erőkifejezés

Fontosabb erőtörvények

a.) Gravitációs erő

- a *tömegvonzás* vagy *gravitáció* a legáltalánosabb kölcsönhatás, mely minden testre hat
- a leggyengébb kölcsönhatás
- bolygók mozgása alapján leszűrt törvény

Bármely két pontszerű, m_1 és m_2 tömegű, egymástól r távolságban lévő test kölcsönösen vonzza egymást olyan erővel, amelynek nagysága a testek tömegének szorzatával egyenesen és a távolságuk négyzetével fordítva arányos:

$$\boxed{F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$$

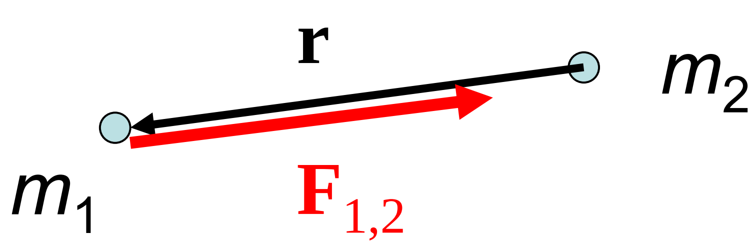
ahol a γ arányossági tényező a gravitációs állandó.

$$\gamma = (6{,}67259 \pm 85 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$$

Fontosabb erőtörvények

Ha a 2. tömegponttól az 1. tömegponthoz húzott rádiuszvektort **r**-rel jelöljük, akkor az 1. tömegpontra a 2. részéről gyakorolt gravitációs erő

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$



Súlyos és tehetetlen tömeg:

m_1, m_2: *súlyos* tömeg

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ -ban m a tehetetlen tömeg

Mérések alapján: $m_t = m_s$

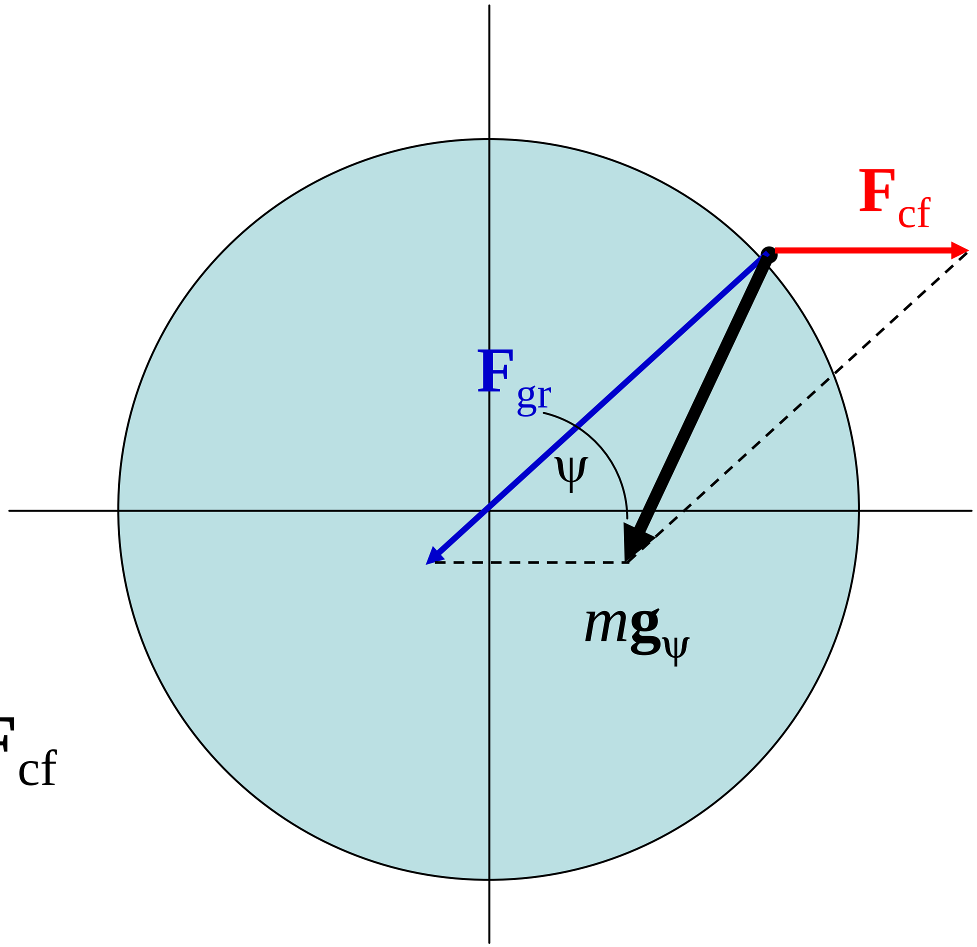
Fontosabb erőtörvények

b.) Nehézségi erő

a Föld által az *m* tömegű testre kifejtett gravitációs vonzóerő és Föld forgása következtében fellépő centrifugális erő eredője

$$F_{\mathrm{gr}} \sim m_{\mathrm{s}}$$

$$F_{\mathrm{cf}} \sim m_{\mathrm{t}}$$



$$m\mathbf{g} = \mathbf{F}_{\mathrm{gr}} + \mathbf{F}_{\mathrm{cf}}$$

Fontosabb erőtörvények

$\mathbf{g}$ nehézségi gyorsulás

↓

erőtörvény: $\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{g}}$

$g = 9{,}80852\ \mathrm{m/s^2}$.

test súlya:
az az erő, amit a test a vele közvetlen (kontakt) kölcsönhatásban lévő másik testre kifejt
(a felfüggesztett test által a fonálra kifejtett húzóerőt,
vagy a szilárd alátámasztásra kifejtett nyomóerőt).

A szabad esés és a hajítás leírásánál a levegő hatását elhanyagoljuk!

Fontosabb erőtörvények

c.) Rugalmas erő, kvázielasztikus erő

Egyenes vonalú harmonikus rezgőmozgás

$$a_x = -\omega^2 x$$

$$\Downarrow$$

$$F_x = -m\omega^2 x$$

lineáris erőtörvény:

$$F_x = -Dx$$

$$\boxed{\mathbf{F} = -D\mathbf{r}}$$ általános alak

A rugó tömegét elhanyagoltuk!

A mozgásegyenlet megoldása

A mechanikában előforduló erők általában az időnek, helynek és sebességnek a függvényei:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, r, \dot{r})$$

Ha a mozgás során a tehetetlen tömeg nem változik, akkor a megoldandó mozgásegyenlet

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, r, \dot{r})$$

közönséges másodrendű differenciálegyenlet

Problémához jól illeszkedő koordináta-rendszer választása

Pl: Derékszögű koordináta-rendszerben

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{aligned}\right\}$$

3 db skaláris másodrendű differenciálegyenlet

A mozgásegyenlet megoldása

A három differenciálegyenlet általános megoldásai:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

A három differenciálegyenlet általános megoldásai egyenként két, összesen hat integrálási állandót, paramétert tartalmaznak.

Az általános **r** = **r**(t) megoldásban szereplő integrálási állandók értékét a *kezdeti feltételekből* határozzuk meg.

Ehhez meg kell adnunk az anyagi pont t = 0 időpontbeli helyzetét és sebességét:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{r}_0(0) \\ \mathbf{v}_0 &= \mathbf{v}_0(0) \end{aligned}\right\} \text{ vagy } \left\{\begin{matrix} x_0 = x(0) & y_0 = y(0) & z_0 = z(0) \\ v_{x0} = v_x(0) & v_{y0} = v_y(0) & v_{z0} = v_z(0) \end{matrix}\right.$$

A mozgásegyenlet megoldása

a.) Egyedül a nehézségi erő hatása alatt álló tömegpont mozgása

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{g}$$

$\Downarrow$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g}$$

m-től független!

<u>*Tfh.:*</u> a mozgás a térnek a Földhöz viszonyítva kis környezetében játszódik le

$\Downarrow$

g = áll

A mozgásegyenlet megoldása

Földhöz rögzített, függőlegesen felfelé irányított *z*-tengelyű koordináta-rendszerben

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -g$$

Megoldása:

$$x = c_1 t + b_1 \qquad y = c_2 t + b_2 \qquad z = -\frac{1}{2} g t^2 + c_3 t + b_3$$

A *b*, *c* konstansokat a kezdőfeltételek határozzák meg

A mozgásegyenlet megoldása

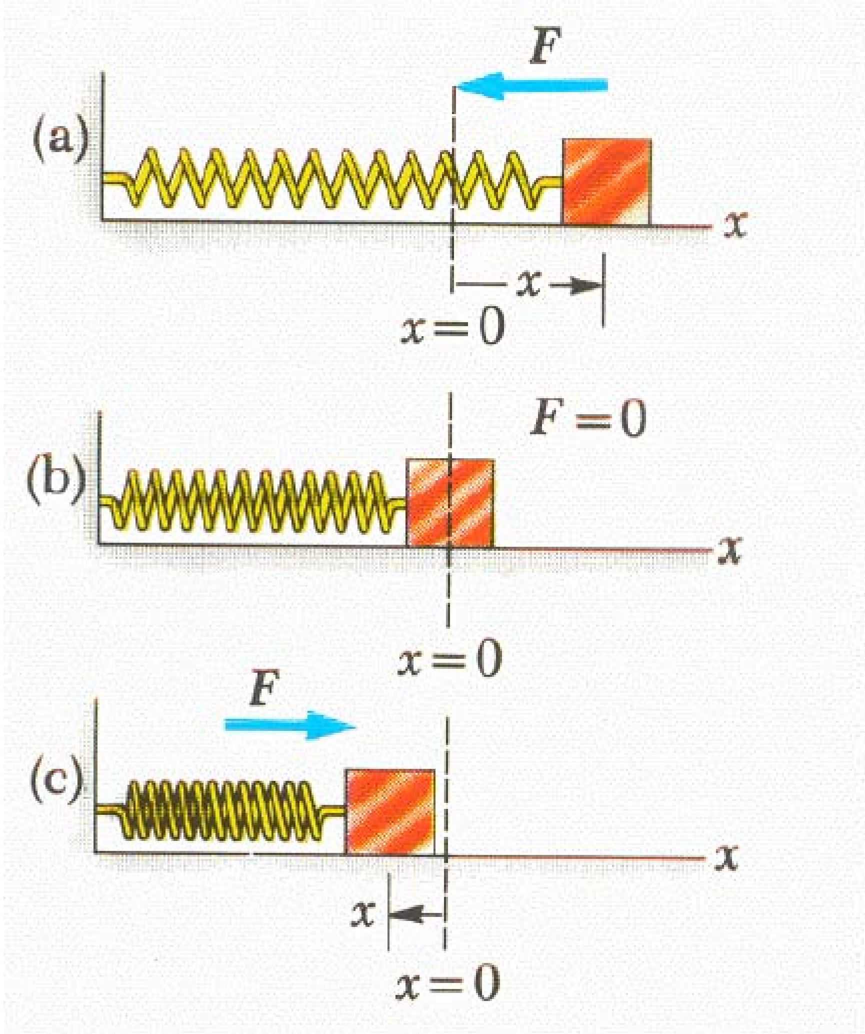
b.) Lineáris erőtörvény

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Dx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

a rezgés körfrekvenciája



A mozgásegyenlet megoldása

A harmonikus rezgés differenciálegyenlete

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Általános megoldása

$$x = A\,sin\left(\omega_0 t + \alpha\right)$$

Az *A* amplitúdó és az α kezdőfázis értékét a kezdeti értékek határozzák meg

Δt=15min

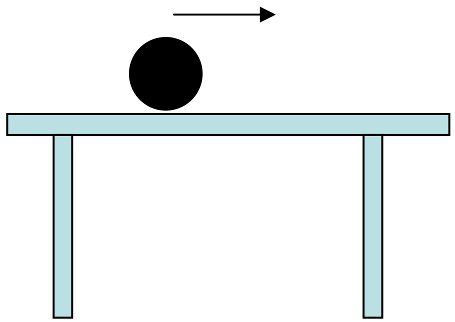
5. tétel

- Szabaderők és kényszererők
- Kényszermozgások
- Mozgás lejtőn

Kényszermozgások

Olyan mozgás, melynél a testnek előírt, merevnek tekinthető felületen vagy görbén kell maradnia, vagy mozgását más geometriai feltételek korlátozzák.

Kényszer: pl. asztal, sín, fonál



A szabad mozgásoknál a mozgást geometriai feltételek nem korlátozzák.

Kényszermozgások

<u>Kényszerfeltételek matematikai megadása:</u>
azon felületek vagy görbék egyenletei, amelyeken a tömegpontnak mozognia kell

A felületen való áthaladást azonban nem a felület akadályozza meg, hiszen az csak egy geometriai alakzat, hanem ténylegesen fellépő erők (az asztalban, a lejtőben, a fonálban ébredő reakcióerők).

Kényszererők:
azok az erők, melyek a test mozgására vonatkozó kényszerfeltételeket biztosítják

A kényszererő merőleges arra a felületre vagy pályára, amelyen a test a kényszermozgást végzi.

Szabad erők és kényszererők

Szabad erők: pl.

- gravitációs erő
- nehézségi erő
- rugalmas erő
- közegellenállás

<u>szabad és kényszererőkre való felbontás indoka:</u>
a legtöbb feladatban csak az anyagi pontra ható szabad erők valamint a kényszerfeltételek ismertek, a kényszererők nem.

A kényszerfeltétel lehet időtől független vagy időtől függő.

Szabad erők és kényszererők

Dinamika alapegyenlete:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{sz} + \mathbf{F}_k$$

Az anyagi pontra ható $\mathbf{F}_{\mathrm{sz}}$ szabaderőkhöz az $\mathbf{F}_{\mathrm{k}}$ kényszererőket hozzáadva az anyagi pont úgy mozog, mintha ezen erők eredője hatására mozgó szabad anyagi pont lenne.

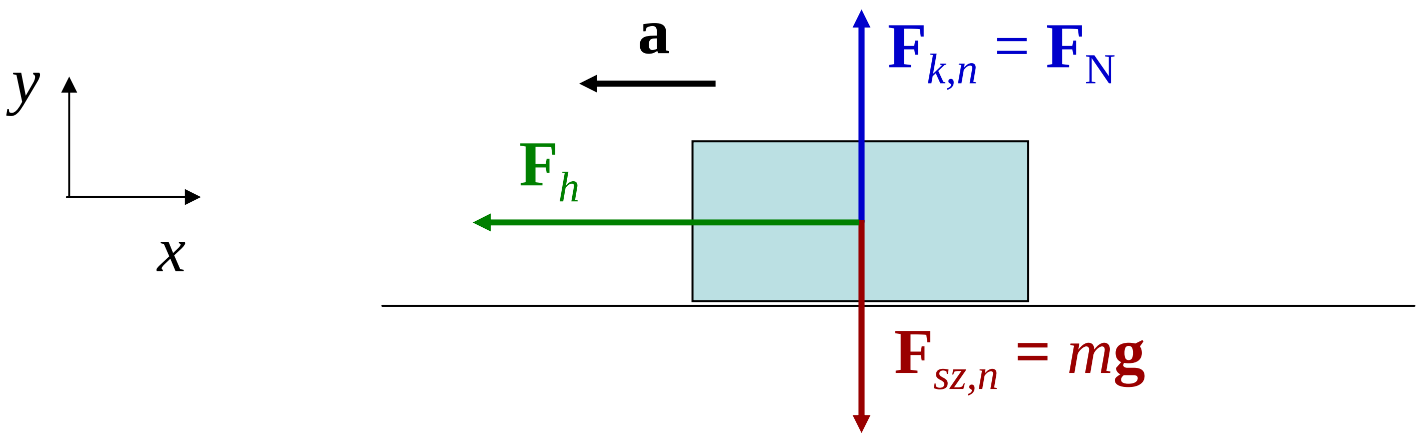
A kényszer szerepe nemcsak mozgásoknál, hanem pl. a vízszintes asztallapra helyezett test egyensúlyánál is jelentkezik.

Szabad erők és kényszererők

A kényszererő nagyságának meghatározása:

- Bontsuk fel az anyagi pontra ható szabaderők eredőjét a felülettel párhuzamos (a felület érintősíkjába eső) és arra (a felület érintősíkjára) merőleges összetevőkre!
- Bontsuk fel a test gyorsulását is a felületre merőleges és párhuzamos komponensekre!
- A dinamika alaptörvénye alapján a merőleges komponensre (y-tengely mentén) a következő egyenletet kapjuk:

$$\mathbf{F}_{sz,n} + \mathbf{F}_{k,n} = m\mathbf{a}_n$$



Szabad erők és kényszererők

$$\mathbf{F}_{sz,n} + \mathbf{F}_{k,n} = m\mathbf{a}_n$$

Nyugvó síkfelületnél: $\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$

$$\Downarrow$$

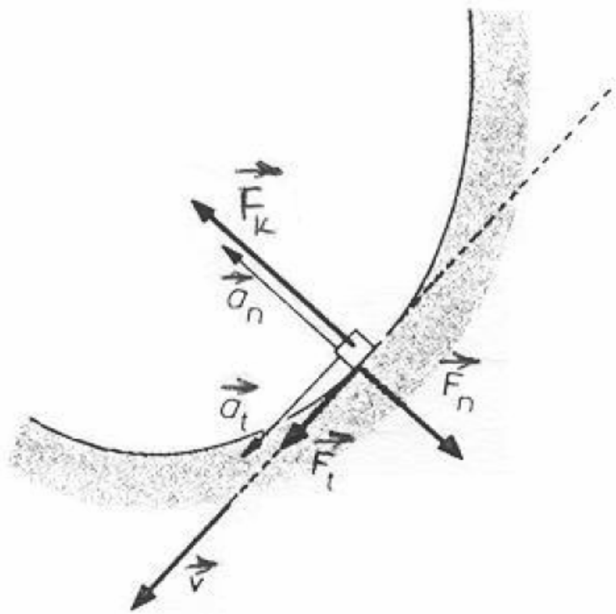
$$F_{k,n} = F_{sz,n}$$

Nyugvó görbült felület: $a_n = \dfrac{v^2}{R}$

$$\Downarrow$$

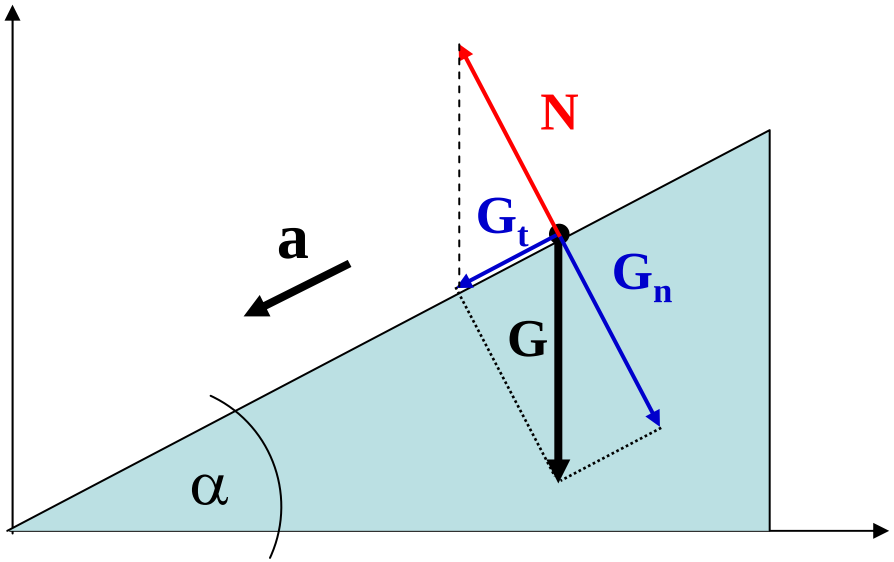
ha $v = 0$, akkor $F_{k,n} = F_{sz,n}$

ha $v \neq 0$, akkor $F_{k,n} \neq F_{sz,n}$



Mozgás lejtőn

Inerciarendszerben nyugvó lejtőn mozgó anyagi pont esetén a matematikai kényszerfeltételt a lejtő síkjának $Ax+By+Cz+D=0$ egyenlete jelenti (A, B, C, D adott állandók).



$\mathbf{F}_{sz,n} = \mathbf{G}_n$

$\mathbf{F}_{k,n} = \mathbf{N}$

$\mathbf{F}_{sz,t} = \mathbf{G}_t$

$\mathbf{F}_{k,t} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{F}_{sz,n} + \mathbf{F}_{k,n} = m\mathbf{a}_n$$

a kényszerfeltételek miatt a test a lejtőre merőleges irányban nem gyorsul

$$\mathbf{G}_n + \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\alpha$$

Mozgás lejtőn

A lejtő síkjával párhuzamos irányban:

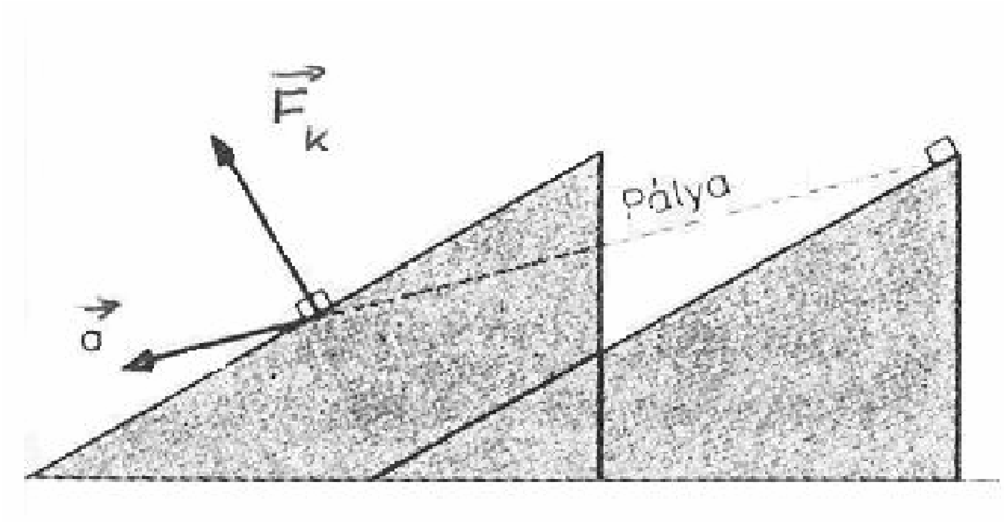
$$\mathbf{F}_{sz,t} = m\mathbf{a}_t$$

$$\mathbf{G}_t = m\mathbf{a}$$

A lejtőn súrlódás nélkül csúszó test gyorsulásának nagysága:

$$\boxed{a = g \sin \alpha}$$

Időben változó kényszer



A mozgó lejtőn lévő anyagi pont inerciarendszerbeli pályája nem egyezik meg a lejtő síkja által kijelölt egyenessel

Mivel sebesség a pálya érintőjének irányába mutat

A gyorsulásnak van a felületre merőleges komponense!

$$F_{k,n} \neq F_{sz,n}$$

Súrlódási erő

<u>Súrlódás:</u>
azon jelenségek összessége, melyek az egymással érintkező testeknek az érintkezési felület mentén való relatív elmozdulásával, ill. ennek akadályozásával kapcsolatosak.

Speciális esetek:

- egy szilárd test a másik felületén csúszik,
- a csúszásnak a nyugalmi állapotból való megindítása

tapadási súrlódási erő:
egy test felületén nyugvó másik test megcsúszását akadályozó erő

$$F_{ts,\max} = \mu_0 N$$

μ_0: tapadási súrlódási tényező

Súrlódási erő

csúszási súrlódási erő:

- iránya ellentétes a sebességgel,
- nagysága első közelítésben független a sebesség és az érintkező felületek nagyságától, és egyenesen arányos a felületre merőleges nyomóerő nagyságával:

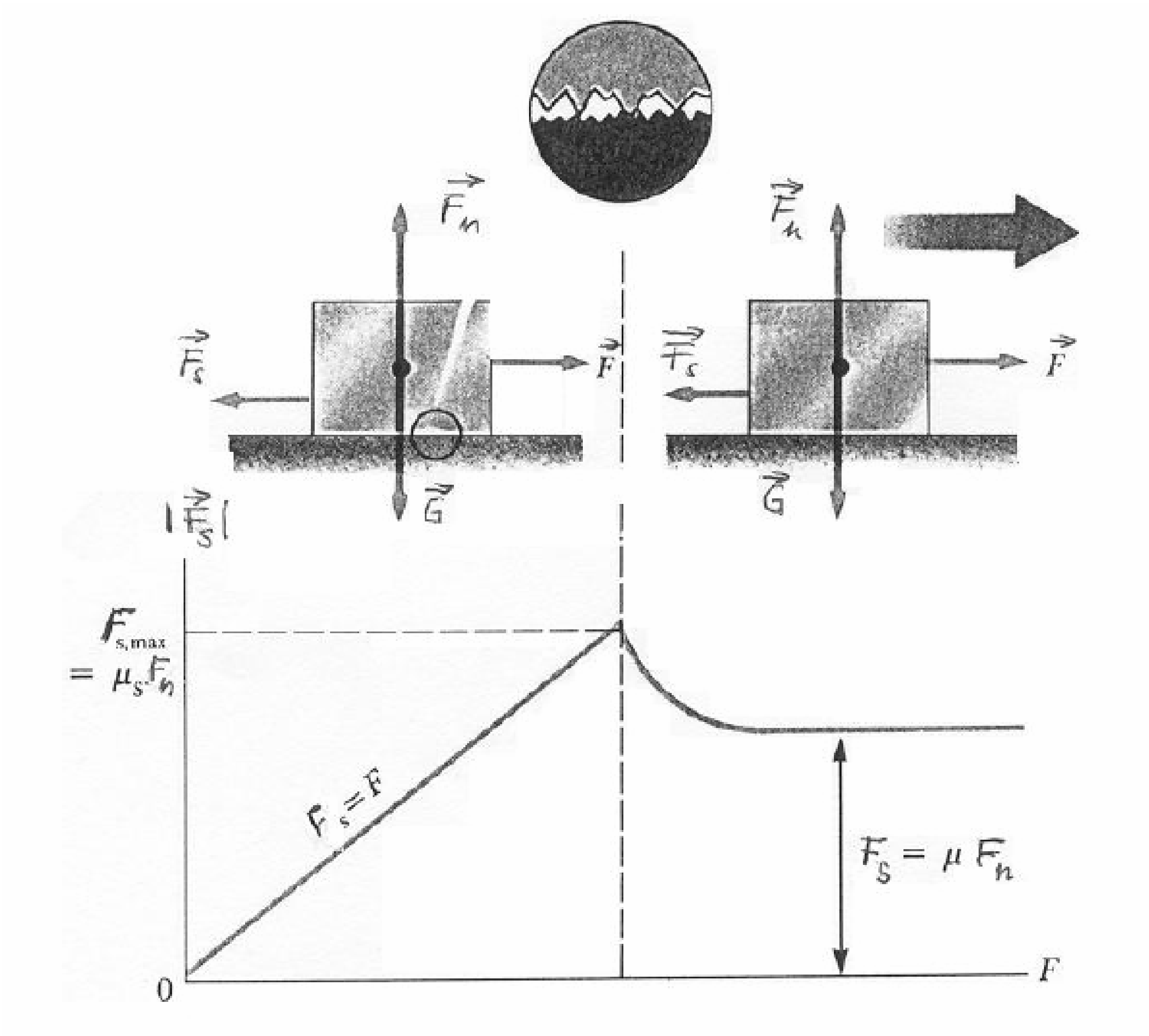
$$F_s = \mu N$$

$$\mathbf{F}_s = -\mu N \frac{\mathbf{v}}{v}$$

μ: csúszási súrlódási tényező

$$\mu < \mu_0$$

Súrlódási erő



6. tétel

- Megmaradó fizikai mennyiségek tömegpont esetén
- Az impulzus
- Az impulzusmomentum

Anyagi pont impulzusa

az *m* tehetetlen tömegnek és sebességnek a szorzata:

$$\mathbf{I} = m\mathbf{v}$$

Newton II. axiómája eredeti megfogalmazásban:

A mozgás megváltozása arányos a külső mozgató erővel, és annak az egyenesnek irányában megy végbe, amelyen ez az erő hat.”

Mai szóhasználattal (mozgás ✹ impulzus):

Az anyagi pont úgy mozog, hogy az impulzus idő szerinti differenciálhányadosa egyenlő az anyagi pontra ható erővel

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{F}$$

Newton II. axiómája

$$\boxed{\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{F}}$$

általánosabb kifejezés, mivel m függhet időtől (pl. rakéta mozgása, elemei részecskék relativisztikus sebességű mozgása)

$$\Downarrow$$

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F}$$

$$\Downarrow$$

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{m\mathbf{a} = \mathbf{F}}$$

m nem függhet az időtől!

Erőlökés

Ha az $\mathbf{F}$ erő állandó egy rövid τ ideig, akkor

⬇

az anyagi pont impulzusának megváltozása τ idő alatt:

$$\Delta\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0 = \underbrace{\mathbf{F}\,\tau}_{\text{erőlökés}}$$

⬇

A sebesség megváltozását nem egyedül az erő szabja meg, hanem az erő és az erőhatás idejének szorzata!

Impulzustétel

Ha az erő az anyagi pontra a t_0 kezdeti és t_1 végső időpontok közötti intervallumban hat, akkor az impulzus megváltozását az $\mathbf{F}(t)$ erőnek ezen két időpont közötti integrálásával kapjuk:

$$\Delta \mathbf{I} = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(t)\,dt$$

Impulzus megmaradásának tétele

Ha az anyagi pontra nem hat erő vagy a rá ható erők eredője zérus, az anyagi pont impulzusa időben állandó.

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I} = \textit{állandó}$$

Mivel az impulzus vektormennyiség, az impulzus állandósága valamennyi összetevőjének állandóságát jelenti.

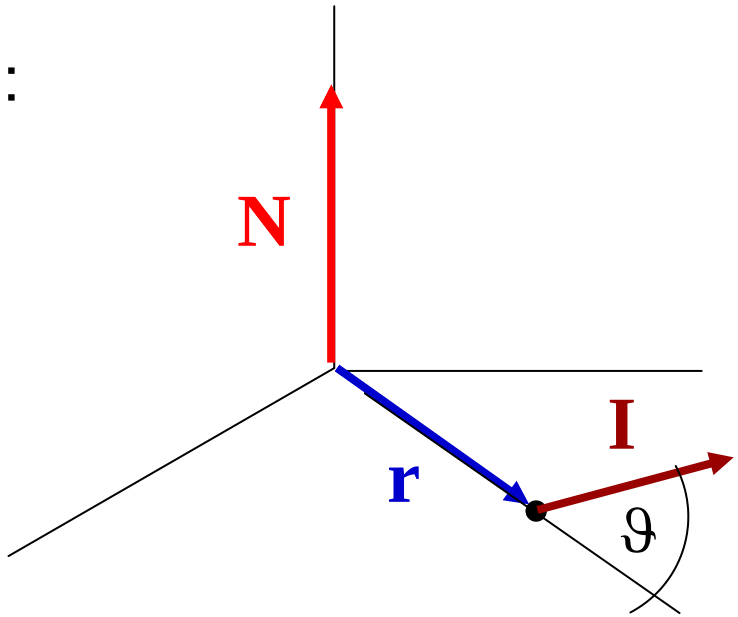
Anyagi pont impulzusmomentuma

Anyagi pont origóra vonatkozó impulzusmomentuma az $\mathbf{r}(t)$ helyvektorának és $\mathbf{I}(t)$ impulzusának vektoriális szorzata:

$$\boxed{\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{I}}$$

Az impulzusmomentum nagysága:

$$N = rI \sin \vartheta$$



Forgatónyomaték

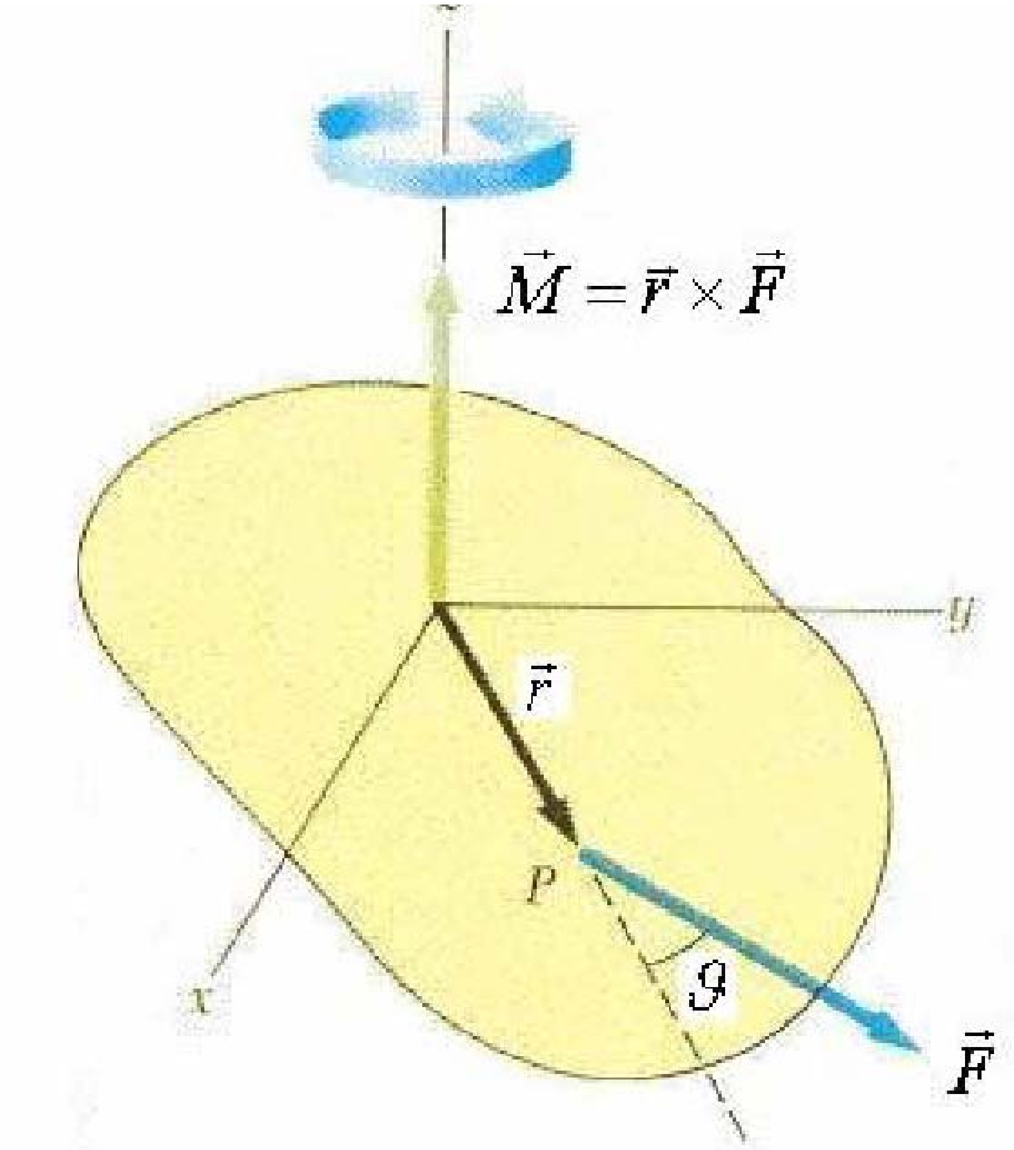
Egy anyagi pontra ható erőnek az origóra vonatkozó forgatónyomatéka az anyagi pont $\mathbf{r}(t)$ *helyvektorának és az* $\mathbf{F}(t)$ *erőnek a vektoriális szorzata:*

$$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}}$$

A forgatónyomaték nagysága:

$$M = rF\sin\vartheta$$

Forgatónyomaték



Az impulzusmomentum-tétel

Az anyagi pont impulzusmomentumának idő szerinti deriváltja az anyagi pontra ható erő forgatónyomatékával egyenlő.

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M}$$

Az impulzusmomentum megmaradásának tétele

Ha az anyagi pontra ható erő forgatónyomatéka zérus, az anyagi pont impulzusmomentuma állandó.

$$\mathbf{M} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N} = \textit{állandó}$$

7. tétel

- Munka és teljesítmény
- Különböző energiafajták (kinetikai, potenciális, rugalmas)

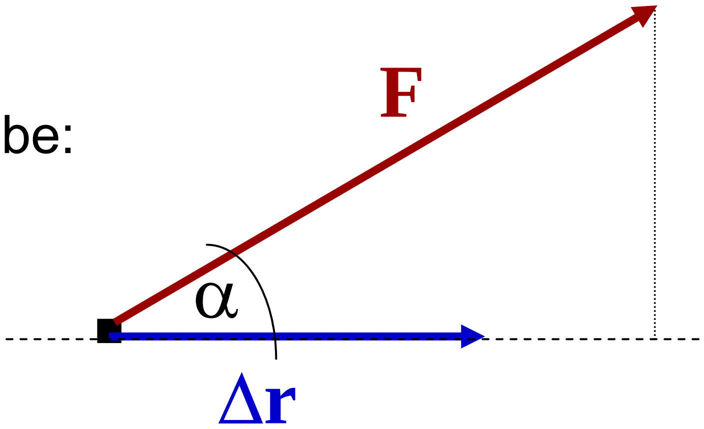
Munka

<u>Az erő munkát végzett az anyagi ponton:</u>

ha az anyagi pontra erő hat és eközben az elmozdul

Ha az anyagi pontra ható $\mathbf{F}$ erő

- állandó
- a $\Delta\mathbf{s}$ elmozdulásvektorral α szöget zár be:



Az $\mathbf{F}$ *erő munkája:*
az erő elmozdulás irányú (előjeles) összetevőjének és az elmozdulás nagyságának szorzata:

$$W = F\cos\alpha \cdot \Delta r = \mathbf{F}\Delta\mathbf{r}$$

SI mértékegysége: Joule (Nm)

Munka

Ha az anyagi pont pályája mentén az erő nem állandó ($\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$), akkor a pályát olyan elemi intervallumokra osztjuk, melyek mindegyikében az erő jó közelítéssel állandónak tekinthető.

$$W \approx \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \Delta \mathbf{r}_i$$

Az $\mathbf{F}$ erőnek valamely görbe AB szakaszán végzett munkája az erő út szerinti integrálja:

$$\boxed{W = \int_A^B \mathbf{F} d\mathbf{r}}$$

Munka

- Ha az $\mathbf{F}$ erő munkája W, akkor $-W$ az $\mathbf{F}$ erő ellenében végzett munka.
- Ha a tömegpontra több erő hat, az eredő erő munkája egyenlő az egyes erők munkáinak algebrai összegével.
- A végzett munka általában függ a pályától.

Konzervatív erők:

Olyan erők, melyeknek az anyagi ponton végzett munkája független a kezdő és végpontot összekötő pályától, csak a kezdő és végpont helyétől függ.

vagy

Olyan erők, melyeknek bármely zárt görbe mentén végzett munkájuk zérus.

Nehézségi erő munkája

Az *m* tömegű test *h* magassággal való emelésénél az emelő erőnek a nehézségi erő ellenében végzett munkája, az ún. emelési munka:

$$W = mgh$$

A nehézségi erő munkája ekkor $-mgh$.

A nehézségi erő konzervatív erő.

Rugóerő munkája

Az egyik végén rögzített, egyensúlyi helyzetéből x távolságra kitérített rugóban ébredő rugalmas erő: $F_x = -\mathrm{D}x$.

A rugóerő munkája, ha a kitérés x_1–ről x_2-re változik:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} Dx\,dx = -\left(\frac{1}{2}Dx_2^2 - \frac{1}{2}Dx_1^2\right).$$

A rugóerő konzervatív erő.

Kényszererők munkája

- A kényszererő merőleges a felületre.

- *Ha a kényszert jelentő felület nyugalomban van az adott vonatkoztatási rendszerben:*
  ekkor a kényszererő merőleges a sebességre, a kényszererő munkája zérus. (pl. rögzített lejtőn lecsúszó anyagi pont, fonálhoz erősített, körpályán mozgó test)

- *Ha a kényszert jelentő felület mozog az adott vonatkoztatási rendszerben:*
  a test sebessége általában nem esik a felület érintőjének irányába, ezért a kényszererő általában nem merőleges a sebességre, és így munkája nem zérus.

Súrlódási erő munkája

A csúszási súrlódási erő iránya ellentétes az anyagi pont sebességével

a súrlódási erő munkája negatív,
csökkenti az anyagi pont kinetikus energiáját

Állandó csúszási súrlódási erő esetén a munka arányos az úttal:

$$W = \underset{g}{\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}} \vec{F}_s \cdot d\vec{r} = -\underset{g}{\int_{s_1}^{s_2}} F_s \cdot ds = -F_s \underset{g}{\int_{s_1}^{s_2}} ds = -F_s s_{12},$$

ahol s_{12} az r_1 és r_2 pontok között a *g* görbe mentén megtett út.

A csúszási súrlódási erő *nem konzervatív,* mert függ az úttól.

Ez a közegellenállásra is igaz ✹ *disszipatív* erők

Teljesítmény

A teljesítmény a munkavégzés időbeli változására ("sebességére") jellemző fizikai mennyiség.

Az anyagi pontra ható $\mathbf{F}$ erő Δt időtartam alatti $\langle P \rangle$ átlagteljesítménye az erő által a Δt időtartam alatt végzett ΔW munkának és a Δt időtartamnak a hányadosa:

$$\langle P \rangle = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Pillanatnyi teljesítmény:

$$\boxed{P(t) = \frac{dW}{dt}}$$

SI mértékegysége: watt (J/s)

Energia

Egy meghatározott *A* állapotban levő test energiával rendelkezik akkor, ha alkalmas körülmények között munkát végezhet.

A test energiáját azzal a munkával mérjük,
amelyet a test végez, míg az *A* állapotból egy megállapodás szerint választott A_0 állapotba jut,
vagy
azzal a munkával, amelyet a testre ható erők ellenében végeznünk kell, míg a testet az A_0-ból az *A* állapotba juttatjuk.

h magasságban levő *m* tömegű testnek a súlyából származó helyezeti energiája:

$$E_{\mathrm{pot}} = mgh$$

x_0-lal megnyújtott rugó helyzeti energiája:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} D x_0^2$$

egy *m* tömegű és **v** sebességű anyagi pont mozgási energiája:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$$

Munkatétel

Egy tömegpont mozgási energiájának megváltozása egyenlő a tömegpontra ható erők eredőjének *W* munkájával.

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W$$

Mechanikai energia megmaradásának tétele

Ha a tömegpontra ható erők eredője konzervatív erő, akkor a tömegpont kinetikai és potenciális energiájának összege, azaz a teljes mechanikai energiája állandó:

$$E_{kin} + E_{pot} = E = állandó$$

8. tétel

- **Megmaradási tételek pontrendszerekre**
  - **impulzustétel**
  - **impulzusnyomaték tétel**
  - **a mechanikai energia megmaradásának elve**
  - **energiatétel**
- **A pontrendszer mozgása**

Pontrendszer

Pontrendszer:
tetszőlegesen kiválasztott anyagi pontok (tömegpontok) halmaza

Pontrendszer tagjaira ható erők

Belső erők

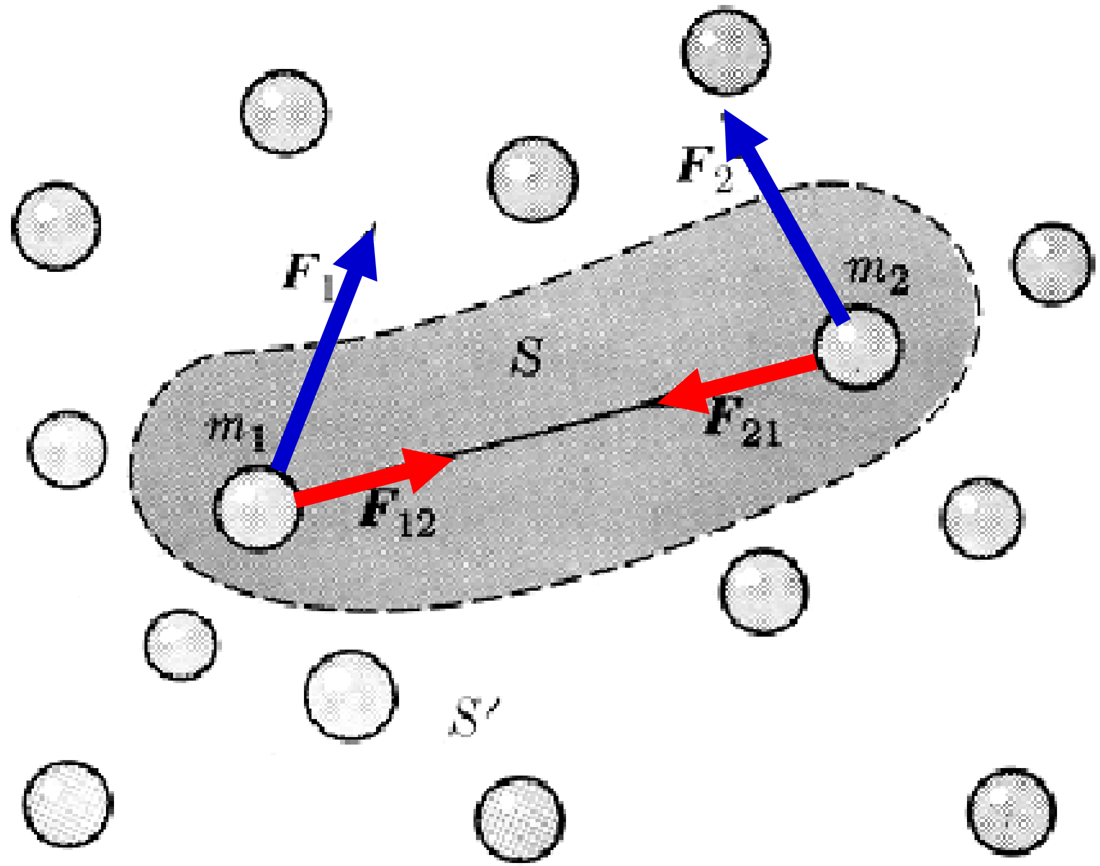
a ~ tagjai által egymásra kifejtett erők

Külső erők

a ~ tagjaira a rendszerhez nem tartozó testek által gyakorolt erők

Belső erő, külső erő

$\mathbf{F}_i$: az *i*-edik anyagi pontra ható külső erők eredője



$\mathbf{F}_{ij}$: az *i*-edik anyagi pontra a *j*-edik által kifejtett erő

Mechanikailag zárt rendszer

Mechanikailag **zárt rendszer:**
az a pontrendszer, melynek tagjaira nem hatnak külső erők, vagy a külső erők vektori eredője zérus.

$$\mathbf{F}^k = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^k = \mathbf{0}$$

Pontrendszer mozgásegyenlete

A pontrendszer *N* db anyagi pontból áll

az m_i tömegű *i*-edik **anyagi pont mozgásegyenlete:**

$$\frac{d\mathbf{I}_i}{dt} = \mathbf{F}_i^k + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ij}^b$$

$i = 1, 2, 3, \ldots, N$

$$\mathbf{F}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{ii}} = \mathbf{0}$$

3*N* db differenciálegyenlet!

Az általános többtest problémának analitikus megoldása csak két test esetén van.

Több kölcsönható anyagi pont esetén csak numerikus megoldás létezik.

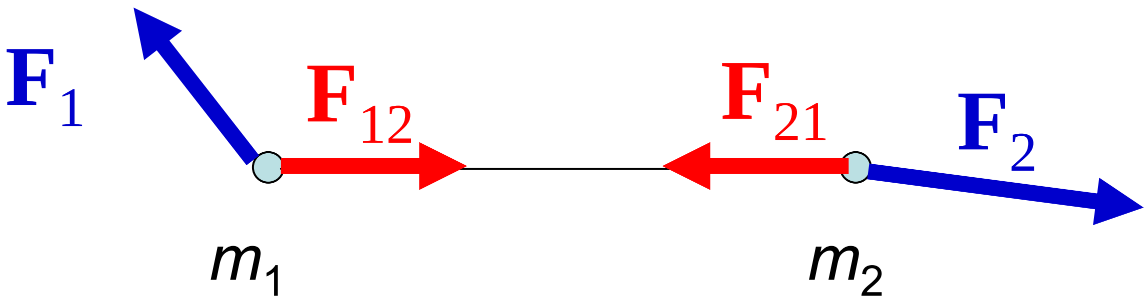
Jellegzetes többtest probléma: pl. a Naprendszer bolygóinak mozgása.

Pontrendszer impulzus tétele

anyagi pontrendszer impulzusa:
a rendszert alkotó anyagi pontok impulzusainak vektori eredője

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{I}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i$$

Két tömegpont esetén:



$$\frac{d\mathbf{I}_1}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12} \qquad \frac{d\mathbf{I}_2}{dt} = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}$$

Pontrendszer impulzus tétele

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \frac{d\mathbf{I}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{I}_2}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

Anyagi pontrendszer impulzusának idő szerinti deriváltja a rendszerre ható külső erők eredőjével egyenlő

$$\boxed{\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{F}^k}$$

A belső erők az egyes anyagi pontok impulzusát ugyan megváltoztathatják, de rendszer eredő impulzusát nem!

Pontrendszer impulzus-megmaradásának tétele

$$\mathbf{F}^k = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^k = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I} = \textit{állandó}$$

Ha a rendszerre külső erők nem hatnak, vagy a külső erők eredője zérus, a pontrendszer impulzusa időben állandó.

Tömegközéppont

Az m_1, m_2, …, m_N tömegű, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, ..., $\mathbf{r}_N$ helyvektorú anyagi pontokból álló rendszer **tömegközéppontja** *az* $\mathbf{r}_{TK}$ helyvektorú pont:

$$\mathbf{r}_{TK} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

A rendszer teljes tömege: $\sum_i m_i = m$

A tömegközéppont tétele

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{F}^k \Rightarrow \frac{d\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}^k \Rightarrow m\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{m}\sum_i m_i \mathbf{r}_i\right) = \mathbf{F}^k$$

$$\boxed{m\frac{d^2\mathbf{r}_{TK}}{dt^2} = \mathbf{F}^k}$$

Egy mechanikai rendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha az egész rendszer tömege ebben a pontban lenne egyesítve, és a rendszer összes külső erőinek az eredője erre a pontra hatna.

A tömegközéppont megmaradásnak tétele

$$\mathbf{F}^k = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^k = \mathbf{0} \Longrightarrow \frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{I} = \acute{a}lland\acute{o}$$

$$\sum_i m_i \mathbf{v}_i = \acute{a}lland\acute{o} \Longrightarrow \mathbf{v}_{\mathrm{TK}} = \acute{a}lland\acute{o}$$

Ha a rendszerre külső erők nem hatnak, vagy a külső erők eredője zérus, a pontrendszer tömegközéppontja egyenes vonalú egyenletes mozgást végez vagy nyugalomban van.

Az impulzusnyomaték tétele

Pontrendszer impulzusnyomatéka: $$\mathbf{N} = \sum_i \mathbf{N}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{I}_i$$

A pontrendszerre ható összes külső erő forgatónyomatéka:

$$\mathbf{M}^{(k)} = \sum_i \mathbf{M}_i^{(k)} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(k)}$$

Pontrendszer impulzusnyomatékának idő szerinti deriváltja egyenlő a rendszerre ható külső erők forgatónyomatékainak eredőjével.

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M}^{(k)}$$

Az impulzusnyomaték megmaradásának tétele

$$\mathbf{M}^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_i^{(k)} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N} = \acute{a}ll.$$

Ha a pontrendszerre külső erők nem hatnak („zárt rendszer”), vagy ha a külső erők forgatónyomatékainak eredője zérus, akkor a rendszer impulzusnyomatéka állandó.

A kinetikai energia tétele (munkatétel)

Pontrendszer mozgási (kinetikus) energiája:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2$$

Pontrendszer mozgási energiájának megváltozása egyenlő a rendszerre ható összes erők (külső és belső erők) munkájának összegével.

$$\boxed{E_{kin2} - E_{kin1} = W = W^{(k)} + W^{(b)}}$$

Pontrendszer kinetikai energiája

A tömegközéppontban egyesítve gondolt tömegű rendszer kinetikai energiája $m = \sum_i m_i$

+

A rendszer tömegpontjainak a tömegközépponthoz viszonyított mozgásának kinetikai energiája

Kényszererők munkája

$$E_{kin2} - E_{kin1} = W = W^{(k)} + W^{(b)}$$

A külső és belső kényszererők munkája is beleértendő, mely sok esetben zérus!!!

Kényszererők munkája akkor zérus, ha a kényszerfeltételek időtől függetlenek.

Mechanikai energia megmaradásának tétele

Ha a pontrendszerre csak konzervatív szabad erők hatnak, akkor a rendszer kinetikai és potenciális energiájának összege, azaz a teljes mechanikai energiája állandó:

$$E_{kin} + E_{pot} = E = \acute{a}lland\acute{o}$$

Ütközés

Egyenes és tökéletesen ...

rugalmas

rugalmatlan

$$\mathbf{I} = \acute{a}lland\acute{o}$$

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2$$

$$E = \acute{a}lland\acute{o}$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$$

maradandó alakváltozás

$$u_{1n} = u_{2n}$$

Tökéletesen rugalmas, egyenes ütközés

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$u_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Tökéletesen rugalmatlan, egyenes ütközés

$$u_1 = u_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Ez már nem hangzott el az előadáson

9. tétel

- **A merev test**
  - **A merev testre ható erők összetevése,**
  - **erőpár,**
  - **forgatónyomaték,**
  - **erőrendszer redukálása.**

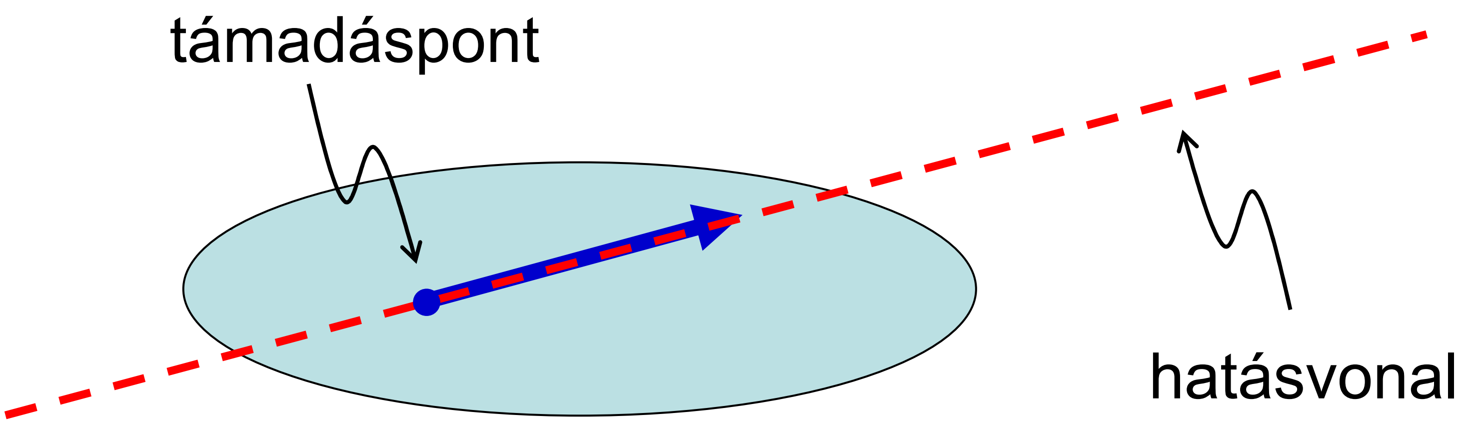
A merev test

~ olyan test, amelynek pontjai a fellépő erők hatására egymáshoz képest csak elhanyagolható mértékben mozdulnak el, azaz a test nem szenved alakváltozást.

A merev test helyzetét, ha test szabadon mozoghat, 9 - 3 =6 független adat határozza meg.

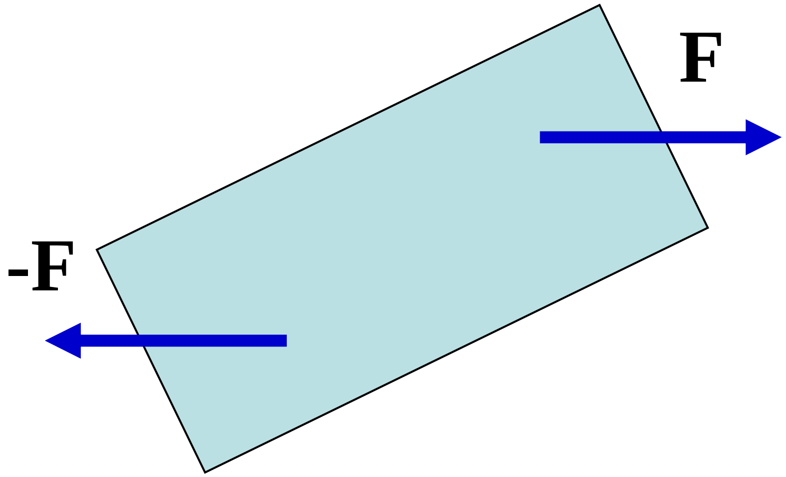
A merev testre ható erők összetevése

<u>erő támadásvonala (hatásvonala):</u>
az erő támadáspontján átmenő és az erő irányába eső egyenes



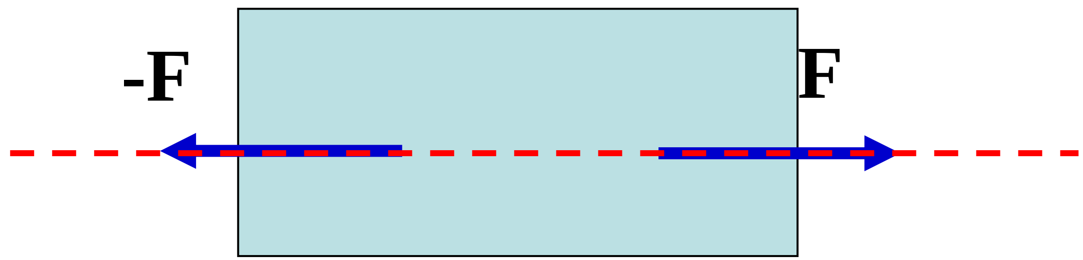
Merev test egyensúlya (1.)

A merev test két egyenlő nagyságú és ellentétes irányú erő hatása alatt akkor van egyensúlyban, ha az erők támadásvonalai egybeesnek.



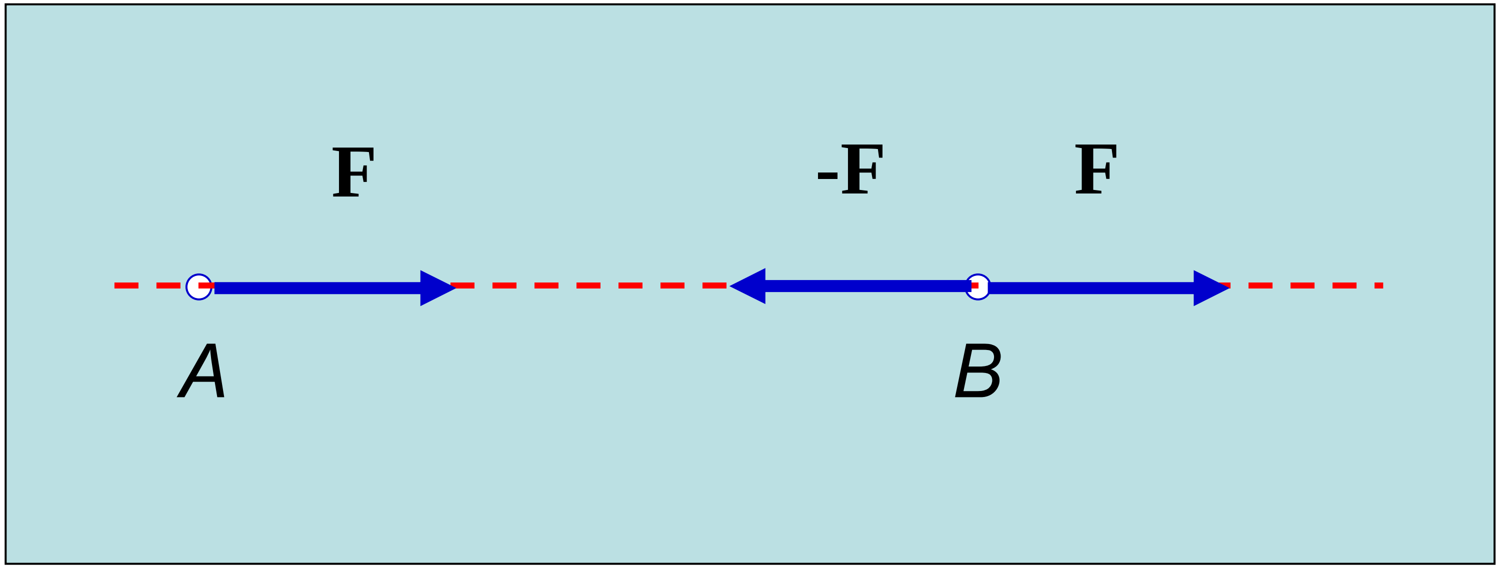
Nincs egyensúlyban

Egyensúlyban van

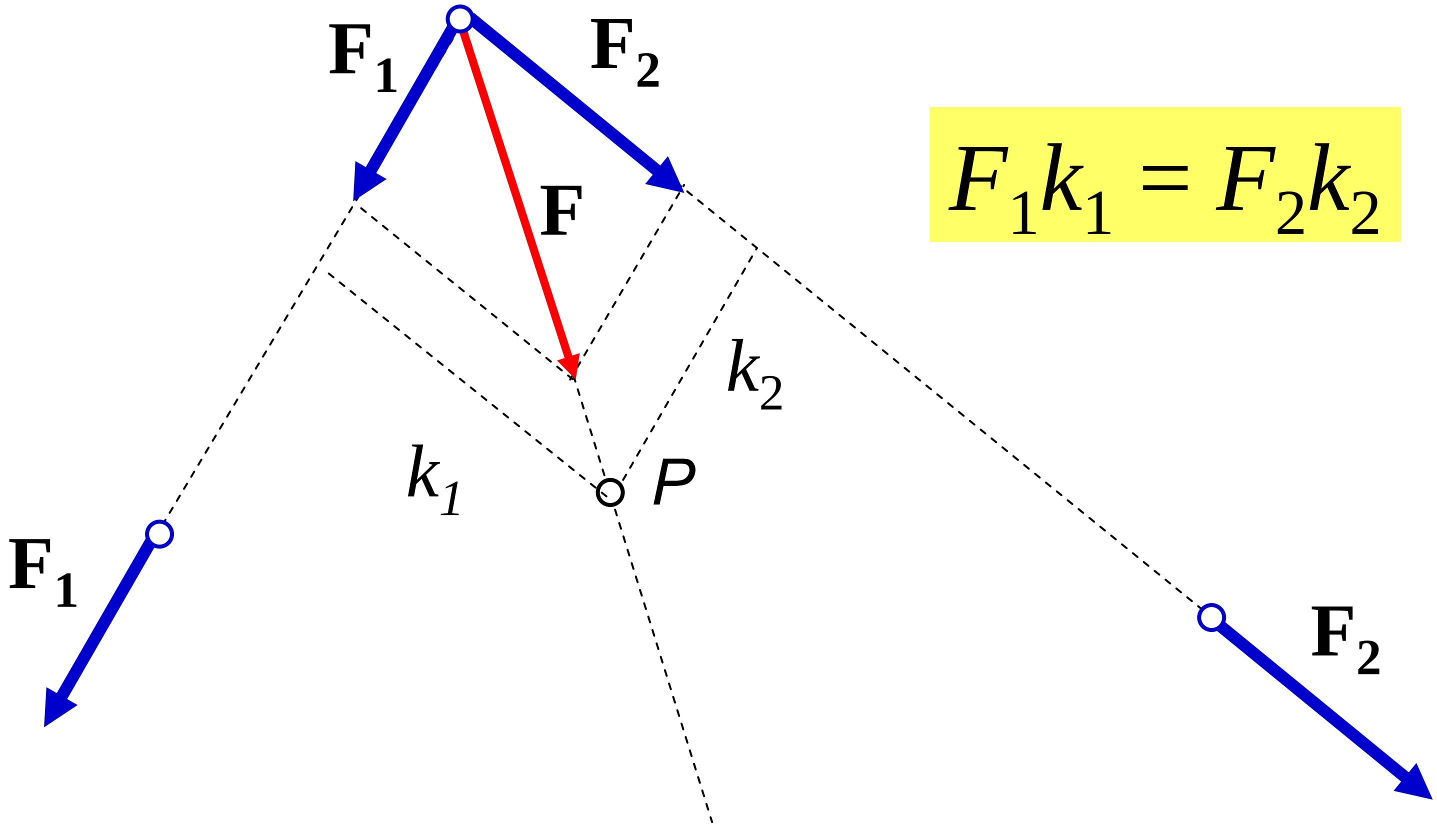


Eltolási tétel

A merev testre ható erő támadáspontja a testben a támadásvonal bármely más pontjába áthelyezhető anélkül, hogy az erő hatása megváltoznék.

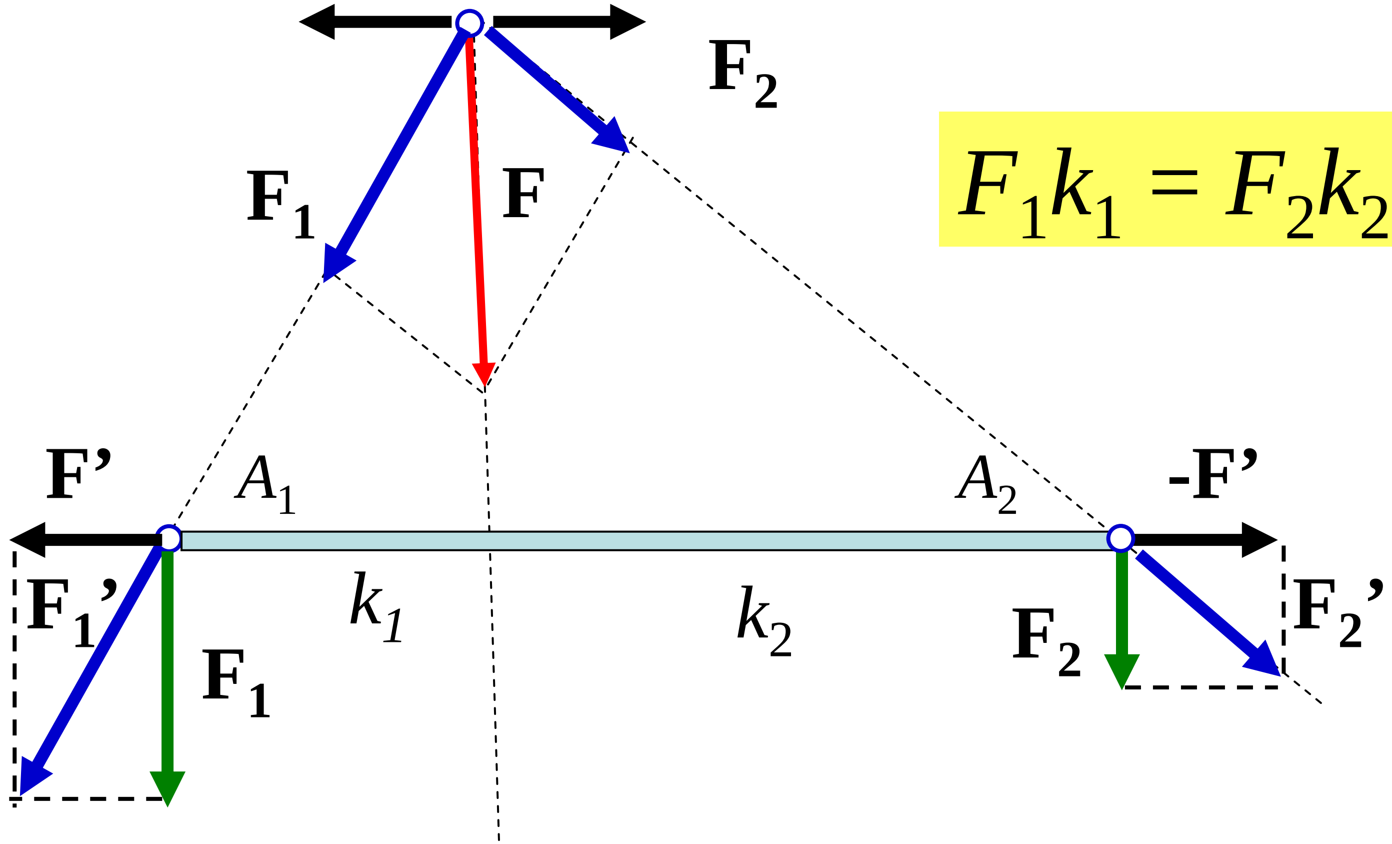


Erők összetevése, ha a támadásvonalak egy síkban vannak, de nem párhuzamosak



$$F_1 k_1 = F_2 k_2$$

Erők összetevése, ha a támadásvonalak egy síkban vannak és párhuzamosak



$$F_1 k_1 = F_2 k_2$$

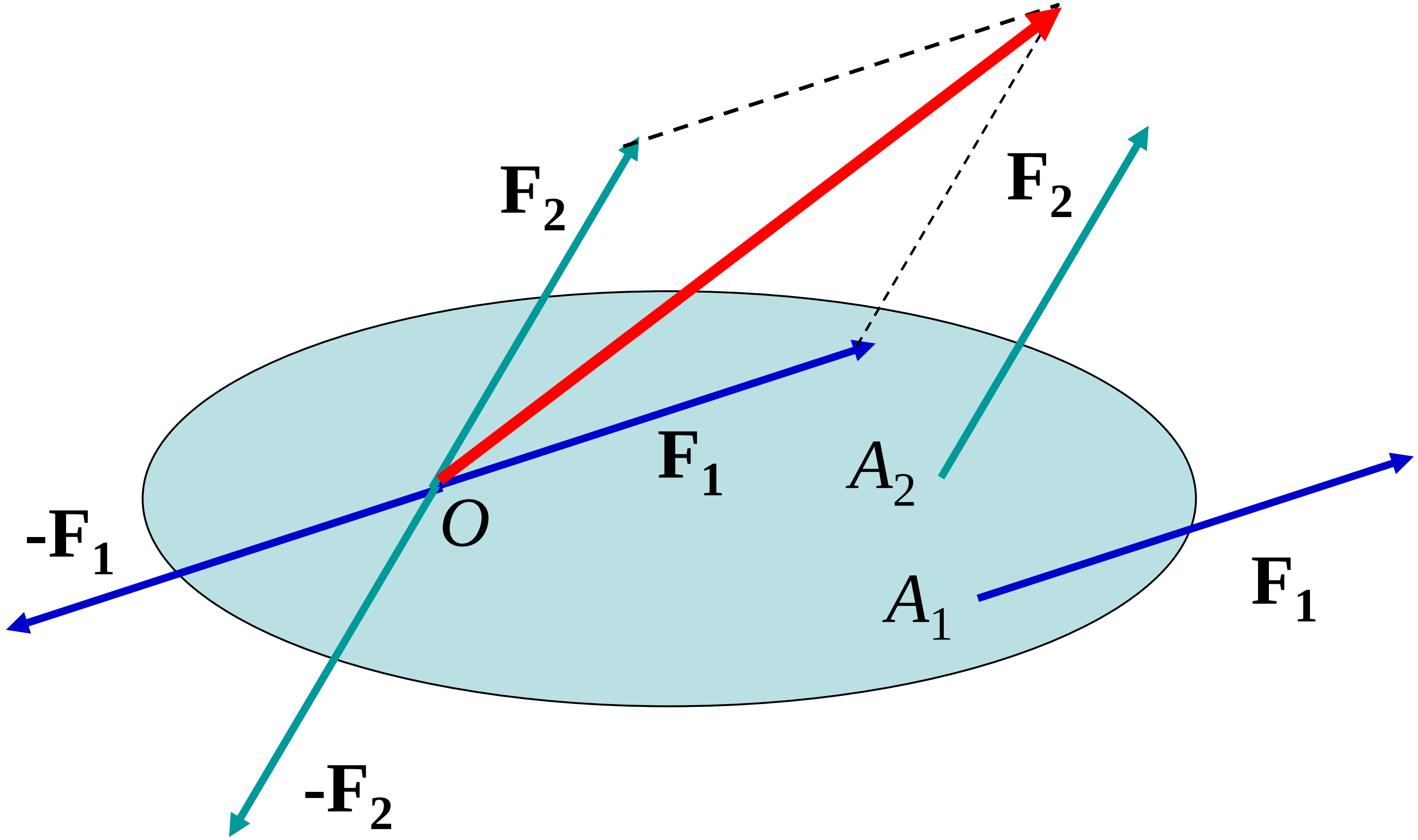
A merev test A_1, A_2 pontjaiban támadó $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ párhuzamos és megegyező irányú erők helyettesíthetők egy az adott erőkkel párhuzamos $F = F_1 + F_2$ nagyságú erővel, amelynek támadásvonala az A_1A_2 távolságot a két adott erő nagyságával fordított arányban osztja ketté.

Erőpár

Két antiparalel, egyenlő nagyságú és különböző hatásvonalú erő erőpárt képez.

Az erőpár nem helyettesíthető egyetlen erővel.

Az erők összetevése általános esetben



n db erő → 1 db erő és n db erőpár