1. fejezet

Hosszúság mérése. A statisztika alapfogalmai

Talán a legegyszerűbb mérési feladat a hosszúságok mérése; ezért ez a gyakorlat különösen alkalmas arra, hogy az adatok kiértékelésének folyamatával is mélyebben megismerkedjünk.

A hosszúság mértékegysége a méter: 1 méter – 1986-ban megadott új definíciója szerint – annak az útnak a hosszúsága, amelyet a fény vákuumban a másodperc 299 792 458-ad része alatt megtesz.[1]

Az egyetlen, méternél nagyobb, használatos SI mértékegység a kilométer. A csillagászat nagy távolságaihoz további egységeket használnak, pl. a fényévet ($9,45 \cdot 10^{15}$ méter). A Galaxisunk mérete kb. 150 ezer fényév; a hozzánk legközelebbi nagy galaxis távolsága 2 millió fényév, a Világegyetem legtávolabbi látható égitestjei mintegy 13 milliárd fényév távolságban vannak.

Méternél kisebb egységek: a milliméter, ill. ennek ezredrésze, a mikrométer (μm). Egy mikrométer körüli a baktériumok mérete, a látható fény hullámhossza kb. 0,4–0,7 μm közötti. A mikrométer ezredrésze a nanométer (nm); az atomi méretek a 0,1 nm mérettartományba esnek.

A gyakorlat eszközei

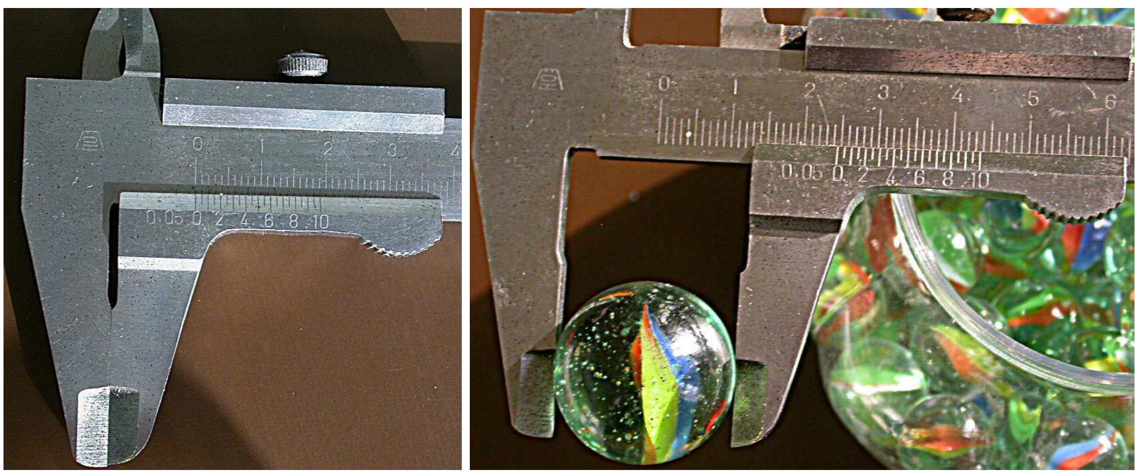
[1]A definíció érdekessége, hogy a fénysebességet adja meg számszerűen, és ehhez rögzíti a métert. Vagyis a fénysebesség többé nem mérés eredménye, hanem definíció! E definíciót 1965-ben Bay Zoltán (1900–1992) javasolta, aki korábban, 1930–1936 között Szegeden, az Elméleti Fizikai Tanszéken dolgozott.

1.1. Tolómérő, mikrométercsavar

A fentebb bemutatott mérettartományból legkönnyebben az emberi test hozzávetőleges nagyságrendjébe eső, kb. a milliméter–kilométer tartományban tudunk egészen egyszerű módszerekkel is elfogadható pontossággal távolságot mérni. A mérés legegyszerűbb eszközei a mérőszalag, méterrúd, vonalzó, melyek használata magától értetődő: leolvassuk, hogy a mérendő hosszúság két végpontja közé hány távolság-egység esik a mérőműszeren. A pontosabb mérésekhez precízebb eszközökre van szükség. A gyakorlat keretein belül ezek közül kettővel, a tolómérővel és a mikrométercsavarral ismerkedünk meg.

1.1.1. Tolómérő

A tolómérő két részből áll: egy „fejesvonalzóhoz” hasonlítható álló részből, és egy ezen hosszirányban elcsúsztatható mozgó részből. Ha egy tárgy méretét meg kívánjuk mérni, a tárgyat az álló és mozgó rész érintkező pofái közé kell fogni. A tolómérő álló részén egy mm beosztású skála található, a mozgó részen szintén van skála – ezt nevezzük mellékbeosztásnak (nóniusznak). A képen bemutatott nóniuszskála teljes hossza 39 mm, amely 10×2 egyenlő részre van beosztva. Ha a tolómérő mozgó részének érintkezőpofáját nekitoljuk az állórész érintkezőjének, akkor a két skála 0 pontja egybeesik, az összes többi osztásvonal azonban eltér. Az eltérés az első vonal esetén a legkisebb, majd egyre nagyobb. A nónius



Balra: a tolómérő 0 állásban. Jobbra: a gömb átmérője 24,55 mm

utolsó osztásvonala az álló skála 39 mm-es vonalával esik egybe, azaz a két skála eltérése 1 mm. A nónius minden osztásvonala $1/20 = 0{,}05$ mm-rel kisebb az 1 mm-nél. Ha a két pofa közé egy 0,05 mm vastag lapot csúsztatunk, akkor a nóniuszskála éppen 0,05 mm-rel eltolódik el a kiinduló helyzethez képest. Ekkor a nóniuszskála első vonala éppen a főskála egy osztásvonalával kerül szembe. Ha 2×0,05 mm-es lapot fogunk a tolómérő pofái közé, akkor a nóniuszskála eltolódása pont akkora, hogy a második vonala (1-es jelzés) esik egy vonalba a főskála egyik osztásvonalával. Általában, ahányszor 0,05 mm a lap vastagsága, a nóniusznak is ugyanannyiadik osztásvonala esik egybe a főbeosztás valamelyik osztásvonalával.

A bal oldali ábra a mérésre kész tolómérő mérőpofáit és skáláját mutatja. A mérőpofák érintkeznek egymással, a tolómérő álló részén látható milliméterskála 0 pontja és a csúszó pofán lévő „nóniusz” 0 osztásvonala egybeesik. A nóniuszskála 10 nagyobb és 10 rövidebb osztásvonallal 20 egyenlő részre van felosztva. A nónius utolsó osztásvonala az álló skála 39 mm-t jelző vonalával esik egybe. A jobb oldali ábrán látható, hogyan mérhető meg tolómérővel egy golyó átmérője. A golyót a mérőpofák közé fogjuk. A pofák enyhén szorítják a golyót. A tolómérő két skálája, amelynek kezdőpontja a műszer alapállásánál egybeesett, most annyival csúszott el egymáshoz képest, mint a golyó átmérője. Ennek értéke milliméteres pontossággal az álló skálán olvasható le. Az ábrán ez majdnem 25 mm, azaz 24 mm + 1 mm-nél kevesebb. A nónius segítségével ezt a távolságot 0,05 mm-es pontossággal határozhatjuk meg.

Ehhez le kell olvasnunk, hogy a nóniusz osztásvonalai közül melyik esik egybe a tolómérő szárán látható álló mm-skála valamelyik osztásával. Esetünkben ez a nóniusz 4. számú és 6. számú közötti, azaz a nullától számított 11. osztásvonala. Az a távolság tehát, amellyel a golyó mérete nagyobb, mint 24 mm, éppen $11 \times 0{,}05 = 0{,}55$ mm. A golyó átmérője tehát 24,55 mm.

Megjegyzés:

Tolómérőt gyakran készítenek úgy is, hogy a nóniuszskála teljes hossza 9 mm, ami 10 egyenlő részre van felosztva. Az ilyen tolómérővel nem lehet 0,05 mm pontossággal mérni, mint a fent bemutatott esetben. A tolómérő leolvasási pontossága ilyenkor 0,1 mm.

1.1.2. Mikrométercsavar

A mikrométercsavar – a gömb átmérője 15,41 mm

Kis hosszúságok, távolságok pontos mérésére igen alkalmas a mikrométercsavar vagy csavarmikrométer. Ha a csavar vége egy teljes fordulatnál 1 mm-rel tolódik el, és a dob pereme 100 egyenlő részre van osztva, akkor egy ilyen dobosztással való elforgatásnak 0,01 mm eltolódás felel meg. Mivel egy dobosztás tizedrésze még becsülhető, vagy nóniusz alkalmazásával leolvasható, a fenti csavarral kb. 0,001 mm pontossággal mérhetünk. A mérésnél a tárgyat a mérőfelületek közé tesszük, és a csavart **a racsnis** állítóval addig forgatjuk, amíg a tárgyat a mérőpofák enyhén megfogják, és a racsni megcsúszik. Ekkor az egész milliméterek számát a tok meghosszabbítására vésett skálán, a milliméter törtrészeit pedig a dobosztáson olvassuk le. Ha a tárgy kivétele és a mérőcsavar teljes becsavarása után, vagyis a mérőpofák közvetlen érintkezésekor az osztás nem pontosan 0-n áll, az eltérést (az ún. nullhibát) figyelembe kell venni. Ha a csavart nem a racsnis áttéten keresztül, hanem közvetlenül kézzel forgatjuk, a megcsavarás különböző erősségéből adódó különböző mértékű megszorítások 0,01–0,05 mm mértékben deformálják a tárgyat, és a mérésünk nem fog pontos eredményhez vezetni!

A mikrométercsavarnál és általában a mérési célokra használt mérőcsavaroknál, a csavar és a csavaranya laza érintkezéséből származó holtmenet hibákat okozhat. Ezeket úgy kerülhetjük el, hogy a végleges beállításokat a csavarnak mindig ugyanolyan irányú forgatásával közelítjük meg.

1.2. Szisztematikus és véletlen hiba

A mérés a valós világ tárgyainak és eseményeinek fizikai összehasonlításából áll. A mértékegységek olyan tárgyak vagy események, amelyek segítségével a megfigyelt folyamat számszerűleg jellemezhető.

A mérés eredménye legalább **két** szám és egy mértékegység. Az első, a mérőszám megadja, hogy a mért dolog mekkora a megadott mértékegységhez viszonyítva, míg a második megmutatja, hogy milyen pontossággal sikerült a nagyságot megmérni. Ez az utóbbi szám a **mérés hibája.** A mérőszám és a hiba közé általában $\pm$ jelet szoktak írni.

A hiba a mérésben ugyanolyan fontos adat, mint maga a mérőszám. Ebből tudjuk meg, hogy mennyire megbízható adatot kaptunk; ennek függvényében beszélünk pontos, tájékoztató jellegű, vagy „csak nagyságrendi pontosságú" mérésről.

Ha hibával terhelt mennyiséggel számolunk, az eredménybe is átterjed a hiba. Ezért fontos, hogy a számítások alkalmával kiszámítsuk az eredményben jelentkező hibát is.

A hibákat természetük szerint két csoportra oszthatjuk: szisztematikus és véletlen hibákra. A szisztematikus hiba oka az, hogy nincs tökéletes műszer, a valódi fizikai értékek a mutatottnál általában kicsit nagyobbak vagy kisebbek. A műszerek kalibrációja („beállítása") arra irányul, hogy a mutatott érték nagyon közel essen a valóságoshoz. A szisztematikus hibák azonban optimálisan beállított műszer esetén is jelentkeznek, mert számos egyéb körülmény (pl. hőmérséklet, légnyomás, páratartalom, a műszer pozíciója a mérés alatt, a levegő összetétele a mérés alatt, a nehézségi gyorsulás értéke stb.) befolyásolhatja a műszer beállítását. Mivel a mérés körülményei nem azonosak a kalibráció körülményeivel, valamekkora szisztematikus hibával mindig számolnunk kell.

A **szisztematikus hibákat** kiszámíthatjuk pl. egy nagyon pontosan ismert tárgy méretének és mérésünk eredményének összehasonlításával. Ha a műszerünk szisztematikus hibáit megismertük, a mért eredményeket a pontos értékre korrigálhatjuk.

A **véletlen hibák** egyik oka a műszer vagy a leolvasás korlátozott pontossága. A másik oka az, hogy a mért tárgy csak jó közelítéssel illeszkedik a mérés módszeréhez. Például nincs tökéletes gömb: ezért ha egy golyó átmérőjét nagy pontossággal többször megmérjük, az értékek különbözni fognak, annak megfelelően, amennyire a golyó átmérője helyről-helyre kicsit változik.

A véletlen hibákat nem lehet korrigálni, de kellően sok méréssel „ki lehet átlagolni" őket.

1.3. Eloszlás, kumulatív eloszlás

A mérési folyamat során ezért általában sok mérést végzünk. Ezek együttes jellemzésére grafikusan az oszlopdiagramot és a kumulatív eloszlást használjuk - mindkettő arra utal, hogy adott mérőszámhoz tartozó mérésből hány darabot készítettünk.

Ha oszlopdiagramot készítünk, a vízszintes tengelyt szakaszokra osztjuk, és ezek fölé olyan magas oszlopokat rajzolunk, ahány darab mérés esett az oszlop alapja által jelzett intervallumba. (Szokás az egyedi darabszámokat leosztani az összes mérés darabszámával – normálás –, így az oszlopdiagram összes oszlopának összege pontosan egy lesz. Ez utóbbi módszer előnye, hogy ha több mérést végzünk, az oszlopok kb. ugyanakkorák maradnak.)

Az oszlopdiagram általában harang alakú, egy néhány oszlop által kirajzolt magas csúcs és ennek „szárnyai" jellemzik az alakot.

Az oszlopdiagram alakja függ az oszlopok alapjának beosztásától: ezt sem túl durvára, sem túl finomra nem szabad választani. A jó kompromisszum kb. az, ha a mérések 90%-a annyi darab oszlopba esik, mint az összes mérés darabszámának a köbgyöke. Vagyis, pl. 80 mérés esetén 4 oszlopban, 1000 mérés esetén 10 oszlopban kell ábrázolni a mérések zömét.

A kumulatív eloszlás azt mutatja meg, hogy hány mérési eredményt kaptunk, amely **kisebb** volt, mint a vízszintes tengelyen ábrázolt érték. A kumulatív eloszlás tehát monoton növekvő görbe (alakja nagyjából az oszlopdiagram integrálgörbéje). A kumulatív eloszlást is normálni szokták. Az oszlopdiagram inkább illusztratív szerepű, a kumulatív eloszlás viszont alapvető fontosságú bizonyos statisztikai mérőszámok (pl. medián) meghatározásánál.

Ha ezeken a diagramokon a mérési sorozat egyedi eredményeit ábrázoljuk, a mérések hibáját meg tudjuk határozni. Minél pontosabb a mérés, az oszlopdiagram annál keskenyebb, a kumulatív eloszlás annál meredekebb lesz. A pontos definíciókat az alábbiak adják meg.

1.4. Átlag, szórás, medián, kvantilisek; az átlag hibája

A mérések hibáját általában a szórással jellemzik: n mérés esetén a szórás az x_i egyedi mérések és az X pontos érték eltérésének négyzetes közepe. Definíciója:

$$\sigma = \sqrt{\sum \frac{(x_i - X)^2}{\mathrm{dof}}},$$

ahol dof a szórás szabadsági fokát jelenti. Ha a pontos értéket előre ismerjük, és a méréssel csak a mérési módszer pontosságát teszteljük,

$$\mathrm{dof} = n.$$

Abban a gyakoribb esetben, amikor a pontos értéket az $X \approx \sum x_i/n$ mintaátlaggal helyettesítjük, a szabadsági fok eggyel csökken,

$$\mathrm{dof} = n - 1.$$

Ha tehát a „pontos érték” is a mi mérésünkből származik:

$$\sigma = \sqrt{\sum \frac{(x_i - X)^2}{n-1}}.$$

A szórást felhasználva a mérési sorozatot jellemezhetjük az $X \pm \sigma$ számpárral; ennek szemléletes jelentése nagyjából az, hogy a mérési adatok legalább 2/3-ad része a $X \pm \sigma$ intervallumba esik.

Ettől a mennyiségtől eltérő jellegű az átlag hibája: adott szórás esetén is, minél többet mérünk, annál pontosabban megismerjük a mintaátlagot. Ha a hiba csak véletlen jellegű, az átlag pontossága a mérések számának növelésével annak **négyzetgyökével** nő, bár σ értéke változatlan marad, hiszen a mérési eljárás nem lett jobb. Ezt úgy fejezzük ki, hogy az átlag Err konfidencia-intervalluma,

$$Err \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n/10}}.$$

Itt a nevezőben lévő szám értéke függ a mérési adatok eloszlásának jellegétől is, a 10-es érték gyakorlati célokra általában megfelelő kompromisszum. (Tehát kb. tíz mérés esetén az adatok szórása és a mintaátlag hibája nagyjából megegyezik.) Az Err jelentése az, hogy ha még nagyon sokszor megismételnénk a mérési sorozatot, az egyedi X átlagok az esetek legalább 95%-ában az általunk megadott $X \pm Err$ érték közé esnének.[2] Ha a mérési sorozat végén $X \pm \mathrm{valami}$ érték áll, meg kell mondani, hogy a $\pm$ után a mérési sorozat szórását (σ) vagy az átlag konfidencia-intervallumát (Err) tüntettük fel; az utóbbi esetben a konfidencia szintjét is meg kell jelölni.

A medián az az érték, amelynél a mérések legföljebb a fele kisebb, és legföljebb a fele nagyobb értékű. Ha nagyság szerint rendezzük a méréseket, a medián (páratlan számú mérés esetén) a középre eső érték, vagy (páros számú mérés esetén) a középen szimmetrikusan elhelyezkedő két érték átlaga.

A mediánt egyszerűen leolvashatjuk a kumulatív eloszlásról: a medián a kumulatív eloszlás 50%-os értékének megfelelő hely.

Ugyanilyen értelemben definiáljuk a kvantiliseket. Az 5, 10, 25, 75, 90, 95%-os kvantilis a kumulatív eloszlás 5, 10, 25, 75, 90, 95%-os értékének megfelelő hely. Természetesen tetszőleges (pl. 99,5%-os) kvantiliseket is definiálhatunk ennek analógiájára.

Ha a középértéket az M mediánban adjuk meg, az ehhez tartozó hibát a Q interkvartilissel, vagyis a 25%-os és a 75%-os kvantilis különbségének felével jellemezzük ($M \pm Q$).

1.5. Hibaterjedés

Ha a számított f érték a mért p_i paraméterek függvénye, és a paramétereket csak adott mérési hiba erejéig ismerjük meg, az f értékére is csak adott hibával következtethetünk. Ekkor $f = f(p_1, p_2, ...p_n)$, f hibája a

[2] Ha ezt a konfidencia-szintet más, pl. 99% értéknek állítjuk be, a mérések darabszámát 10 helyett más számmal, az adott esetben kb. 4-gyel kell osztani, annak megfelelően, hogy szélesebb „hibatartományt” kell kijelölnünk. A különböző típusú eloszlások különböző konfidencia-szintjeihez tartozó faktorokat statisztikai könyvek táblázatai (ún. t-táblázatok) tartalmazzák.

következőképpen számolható:

$$\sigma_f = \frac{\partial f}{\partial p_1}\sigma_{p1} + ... + \frac{\partial f}{\partial p_n}\sigma_{pn}.$$

Ha a különböző paraméterek hibái egymást nem befolyásolják (függetlenek), az alábbi formulát is használhatjuk:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\sigma_{p1}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial p_n}\sigma_{pn}\right)^2}.$$

Összeg esetén például, $f = a + b$, $\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} = 1$, vagyis

$$\sigma_f = \sigma_{a+b} = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2},$$

vagyis **összeg esetén a hibák négyzetei összegződnek.** Szorzat esetén, pl. $f = a \cdot b$, $\frac{\partial f}{\partial a} = b$, $\frac{\partial f}{\partial b} = a$, vagyis

$$\sigma_f = \sigma_{a \cdot b} = \sqrt{a^2\sigma_b^2 + b^2\sigma_a^2}.$$

Ezt az összefüggést $a \cdot b$-vel leosztva a jobb oldalon $a \cdot b$ relatív hibáját, $\frac{\sigma_{ab}}{ab}$ értékét alakítjuk ki:

$$\frac{\sigma_{ab}}{ab} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2}.$$

Ez utóbbi eredmény szerint **szorzat esetén a relatív hibák négyzete összegződik** (nem szorzódik!). Vagyis, ha pl. a értékét 6%, b értékét 8% hibával ismerjük, ab értékét $\sqrt{(6\%)^2 + (8\%)^2} = 10\%$ hibával fogjuk ismerni.

1.6. Feladatok

Eszközök: 1 db tolómérő, 1 db mikrométer, 1 db téglatest vasból, üveggolyók, mérőpohár, víz

1. A tolómérővel mérje meg a kiadott téglatest oldalait, mindegyiket három-három különböző helyen! Számítsa ki a szórást, az átlagot és az átlag hibáját! Számítsa ki a téglatest térfogatát és annak hibáját!
2. Mérje meg mikrométercsavarral a kiadott 25 üveggolyó átmérőjét! Számítsa ki a szórást, az átlagot és az átlag hibáját!
3. Rajzolja föl a mérések eloszlását és kumulatív eloszlását! Az eloszlásdiagramon jelölje az átlag helyét és a szórás tartományát! A kumulatív eloszlásdiagramon jelölje a mediánt és a 25, valamint 75%-os kvantiliseket!
4. Tételezze fel, hogy mindegyik golyó tökéletesen gömb alakú. Az átlagos átmérő alapján számítsa ki az összes üveggolyó együttes térfogatát! Mennyi ennek a hibája?
5. Mérje meg digitális mérleggel az imént mért üveggolyók össztömegét. Mennyi a golyók sűrűsége? Mennyi a sűrűség hibája?
6. Helyezze a golyókat a mérőpohárba, jegyezze meg a golyóhalom magasságát. Ürítse ki a mérőpoharat, öntsön bele kb ugyananannyi vizet, mint ameddig a golyók értek az előbb. Mennyi víz van a mérőpohárban most? Helyezze vissza a golyókat is; a vízszint emelkedésével mérje meg közvetlenül a golyók össztérfogatát. Hogyan viszonyul ez az imént számított értékhez, és annak hibájához? Milyen okok miatt tapasztalható eltérés a számított össztérfogattól?