

Kétállapotú spin időbeli változása mágneses mezőben

1. Oszcilláció energiasajátállapotok között

Egy mágnesű, vagy egy kis köráram mágneses nyomatékkal (momentummal) rendelkezik, ez az $\mathbf{m}$ mennyiség jellemzi azt, hogy milyen erős a mágnes. Amint az az elektromágnességtanból ismeretes, ha egy $\mathbf{A}$ felületet körülzáró síkbeli vezető hurokban I erősségű áram folyik, akkor a mágneses momentuma $\mathbf{m} = I\mathbf{A}$ nagyságú, iránya pedig a hurok síkjára merőleges, az áram irányával jobbcsavart alkotó irány. A mágneses momentummal rendelkező testre a $\mathbf{B}$ mágneses mező forgatónyomatékokat gyakorol, ez utóbbinak a mérése egyébként az egyik módja a $\mathbf{B}$ erősségének jellemzésére. Mágneses momentummal rendelkezik számos alapvető atomfizikai részecske is pl. az elektron a proton és a neutron. Mágneses momentum általában mozgó töltéshez (áramhoz) kapcsolódva lép föl, mint a körvezető esetén is és arányos a mechanikai perdülettel, azaz impulzusnyomatékkal. Az atomi részecskék a tapasztalat szerint nyugalmi rendszerükben is rendelkeznek ilyen impulzusnyomatékkal, úgynevezett *spinnel*, amit nagyon durván úgy lehet elképzelni mintha ezek a részecskék pörögnének egy tengelyük körül. Mai tudásunk szerint a proton és a neutron spinje és mágneses nyomatéka belső szerkezetükkel kapcsolatos. Elektron esetén, amelynek az ismert részecskék közül a legnagyobb a mágneses nyomatéka, (a Bohr magnetonnak nevezett mennyiség: $-9.3 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2$) a mélyebb (relativisztikus) kvantumelmélet alapján a mechanikai nyomaték, azaz a spin, és a hozzá csatolódó, vele arányos mágneses nyomaték belső szerkezet föltevése nélkül is első elvekből származtatható. Külső mágneses mezőben egy mágneses nyomatékkal bíró áramhuroknak, tekercsnek vagy részecskének $E = -\mathbf{m}\mathbf{B} = -mB \cos \theta$ skaláris szorzattal adott potenciális energiája van. Ez az elektrodinamikában leveztetett összefüggés egyszerűen érthető: a mágnesűnek minimális az energiája ha a mágneses momentuma a $\mathbf{B}$ irányba mutat, oda spontán módon befordul, illetve ahhoz, hogy átfordítsuk $2mB$ munkát kell végezni.

Klasszikusan az E energia ezek szerint az $\mathbf{m}$ és $\mathbf{B}$ által bezárt szög értékétől függően $-mB$ és mB között a θ értékétől függően akármekkora lehet, de egy atomi részecske esetén ez nem így van, erről tanúskodik ezüstatomok esetén a Stern Gerlach kísérlet, ahol csak kétféle energia lehetséges. Ugyanez a helyzet elektronok vagy protonok esetén is, az energia csak kétféle lehet $\varepsilon_+ = mB$, $\varepsilon_- = -mB$. Ennek oka, hogy ezek a részecskék csak kétfajta saját-impulzusnyomatékkal, spinnel rendelkezhetnek, és a mágneses nyomaték a kvantummechanikában is arányos az impulzusnyomatékkal. Megjegyezzük még, hogy az impulzusnyomaték diszkrét volta a kvantummechanikában általános elvekből levezethető. Itt azonban csak arra a föntiekből levonható következtetésre lesz szükségünk, hogy az elektron vagy a proton spinállapota és így mágneses állapota is egy kétdimenziós (komplex) Hilbert tér vektoraként tekinthető. Erre utal a Stern-Gerlach kísérlet, és számos egyéb azóta elvégzett mérés.

Tekintsük tehát a részecskét egy külső homogén mágneses térben, ahol mágneses nyomatéka két irányban "állhat be", azaz a mágneses nyomaték mérésekor két sajátirány lehetséges, a mezővel párhuzamos vagy azzal ellentétes irány, jelöljük ezeket $|+\rangle$ illetve $|-\rangle$ jellel. Ezek különböző energiájúak: $\varepsilon_+ = mB_0$ illetve $\varepsilon_- = -mB_0$, ezek a spinhez csatolódó H_0 energia-operátor, a Hamilton-operátor megfelelő sajátértékei:

$$H_0|+\rangle = \varepsilon_+|+\rangle, \quad H_0|-\rangle = \varepsilon_-|-\rangle.$$

A két sajátvektor vagy sajátirány az állapottér belső szorzata szempontjából egymásra ortogonális: $\langle + | - \rangle = 0$, és normálnak tekintjük őket, azaz $\langle + | + \rangle = \langle - | - \rangle = 1$. A spin általános állapota azonban ezen két állapot tetszőleges szuperpozíciója is lehet, és ez a szuperpozíció

általában függ az időtől. A kvantummechanika általános törvénye szerint az állapotvektor az alábbi dinamikai egyenlet, azaz a Schrödinger egyenlet szerint változik

$$i\hbar \frac{d|\Psi\rangle}{dt} = H_0 |\Psi\rangle$$

ahol az itt vizsgált esetben $|\Psi\rangle$ egy vektor a kétdimenziós térben, a H_0 operátort pedig a fenti két sajátvektorán adott hatása egyértelműen meghatározza. Keressük a megoldást a

$$|\Psi(t)\rangle = c_+(t)|+\rangle + c_-(t)|-\rangle$$

alakú lineáris kombináció alakjában, ahol a $c_+(t)$ és $c_-(t)$ időtől függő komplex értékű függvények.

Megoldás:

$$|\Psi(t)\rangle = c_+(0)e^{-i\varepsilon_+t/\hbar}|+\rangle + c_-(0)e^{-i\varepsilon_-t/\hbar}|-\rangle$$

#

ahol $c_+(0)$ és $c_-(0)$ a $|\Psi(0)\rangle$ kezdőállapotot adják meg a $t = 0$ időpontban. Írjuk elő, hogy a kezdőállapot legyen normált: $\langle\Psi(0)|\Psi(0)\rangle = 1$, ebből következően $|c_+(0)|^2 + |c_-(0)|^2 = 1$, illetve láthatóan minden t időpillanatban $|c_+(t)|^2 + |c_-(t)|^2 = 1$. azaz az időfejlődés során a norma megmarad. Vizsgáljuk meg mi annak az amplitúdója, hogy a rendszer a t időpillanatban a kezdőállapotban van, azaz számítsuk ki a $\langle\Psi(0)|\Psi(t)\rangle$ belső szorzatot:

$$\langle\Psi(0)|\Psi(t)\rangle = |c_+(0)|^2 e^{-i\varepsilon_+t/\hbar} + |c_-(0)|^2 e^{-i\varepsilon_-t/\hbar}.$$

A megfelelő valószínűség ennek az abszolút érték négyzete, azaz annak a valószínűsége, hogy a spin t idő múlva is a kezdő állapotban van:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0(t) &= |\langle\Psi(0)|\Psi(t)\rangle|^2 = |c_+(0)|^2 e^{-i\varepsilon_+t/\hbar} + |c_-(0)|^2 e^{-i\varepsilon_-t/\hbar}|^2 = \\ &= |c_+(0)|^4 + |c_-(0)|^4 + 2|c_+(0)|^2 |c_-(0)|^2 \operatorname{Re} e^{i(\varepsilon_+ - \varepsilon_-)t/\hbar} = \\ &= |c_+(0)|^4 + |c_-(0)|^4 + 2|c_+(0)|^2 |c_-(0)|^2 \cos \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{\hbar} t \end{aligned}$$

Az eredmény szerint általános esetben a valószínűség

$$\omega_0 = \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{\hbar}$$

#

körfrekvenciával harmonikusan oszcillál.

13.1 Feladat: Mely időpillanatokban lesz a $\mathcal{P}_0(t)$ valószínűség maximális illetve minimális és mennyi ekkor az értéke. Lehet-e a $\mathcal{P}_0(t)$ valószínűség nulla?

Látható, hogy ha a spin állapota kezdetben éppen H_0 valamelyik sajátállapota, mondjuk a $|-\rangle$, akkor $c_-(0) = 1$ (fáziskonvenció) és a normálás miatt $c_+(0) = 0$. Ilyenkor a valószínűség $\mathcal{P}_0(t) = 1$ tetszőleges időpillanatban, s ugyanez a helyzet, ha a kezdeti állapot a $c_+(0) = 1$ kezdőföltételnek megfelelően a $|+\rangle$ állapot. Az is egyszerűen látható, hogy ha $\varepsilon_+ \neq \varepsilon_-$, akkor a $\mathcal{P}_0(t) = 1$, tetszőleges t -re eredmény csak ezekre a kezdőállapotokra áll fenn. Emiatt a $|-\rangle$ és a $|+\rangle$ állapotokat, amelyeket az tüntet ki, hogy ezek a H_0 operátor sajátállapotai: stacionárius állapotoknak nevezzük. Ha a rendszer ezek valamelyikéből indul, akkor lényegében ebben a kezdeti állapotban is marad, mert ezek időfejlődése triviális: $e^{-i\varepsilon_+t/\hbar}|+\rangle$, illetve $e^{-i\varepsilon_-t/\hbar}|-\rangle$. Ez a kvantummechanika általános törvényszerűsége, a kétdimenziós térnél bonyolultabb állapotterű rendszerekre is érvényes. Ráismerünk, hogy ezek a stacionárius állapotok éppen a Bohr által (jóval a Schrödinger egyenlet bevezetése előtt) posztulált, de mélyebben nem értelmezett stacionárius állapotok.

A **ref: Bohr** összefüggés kapcsolatos a Bohr féle második posztulátummal. Ezt a kapcsolatot amelynek korrekt kifejtésére ezen a szinten nincs mód, nagyjából a következőképpen lehet értelmezni. Az öt körülvevő elektromágneses mező hatására a kétállapotú rendszer a $|-\rangle$ és a $|+\rangle$

állapotok szuperpozíciójába kerül és a két stacionárius állapot között ω_0 körfrekvenciával oszcillál. Eközben egy úgynevezett átmeneti atomi elektromos vagy mágneses dipólusmomentum keletkezik, amely ugyanilyen körfrekvenciával rezeg, s ennek révén $\hbar\omega_0$ energiájú elektromágneses kvantumot, azaz fotont képes elnyelni vagy kibocsátani.

2. Időfejlődés az energiasajátállapotoktól különböző bázisban.

Tegyük föl most, hogy a B_0 mágneses mező mellett van még egy erre merőleges B_1 mező is, úgy hogy a teljes mágneses mező iránya most már nem a B_0 irányú z tengely, hanem egy azzal valamilyen szöget bezáró irány. A lehetséges energiasajátértékek ilyenkor $\varepsilon_2 = m\sqrt{B_0^2 + B_x^2 + B_y^2}$ illetve $\varepsilon_1 = -m\sqrt{B_0^2 + B_x^2 + B_y^2}$ és a most H -val jelölendő energiaoperátor megfelelő sajátállapotai legyenek $|1\rangle$ és $|2\rangle$.

$$H|1\rangle = \varepsilon_1|1\rangle, \quad H|2\rangle = \varepsilon_2|2\rangle$$

Ezek nyilván nem azonosak az előző $|+\rangle$ és $|-\rangle$ állapotokkal, de előfordulhat, hogy valamilyen okból most is abban a bázisban akarunk spint, azaz mágneses nyomatékot mérni, amelyek a H_0 sajátállapotai. Szeretnénk tehát megállapítani a rendszer állapotát a $|+\rangle$ és $|-\rangle$ bázisban, amely most már nem sajátállapota a H -nak. Az előzőek alapján ezt úgy tehetjük meg, hogy megkeressük a H sajátállapotait a H_0 sajátállapotainak bázisán kifejtve. Azaz megkeressük az

$$|1\rangle = a_{1+}|+\rangle + a_{1-}|-\rangle$$

#

$$|2\rangle = a_{2+}|+\rangle + a_{2-}|-\rangle$$

kifejtésben a kifejtési együtthatókat, és így az előző pont mintájára az

$$i\hbar \frac{d|\Psi\rangle}{dt} = H|\Psi\rangle$$

dinamikai egyenlet általános időbeli megoldása most már a

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= c_1(0)e^{-i\varepsilon_1/\hbar}|1\rangle + c_2(0)e^{-i\varepsilon_2/\hbar}|2\rangle = \\ &= c_1(0)e^{-i\varepsilon_1/\hbar}(a_{1+}|+\rangle + a_{1-}|-\rangle) + c_2(0)e^{-i\varepsilon_2/\hbar}(a_{2+}|+\rangle + a_{2-}|-\rangle) = \\ &= (a_{1+}c_1(0)e^{-i\varepsilon_1/\hbar} + a_{2+}c_2(0)e^{-i\varepsilon_2/\hbar})|+\rangle + (a_{1-}c_1(0)e^{-i\varepsilon_1/\hbar} + a_{2-}c_2(0)e^{-i\varepsilon_2/\hbar})|-\rangle \end{aligned}$$

#

alakba írható, amiből a $|+\rangle$ és $|-\rangle$ állapotok amplitúdója leolvasható.

Szükségünk van tehát a **ref: kifejtés** együtthatóira, ahol tudjuk, hogy $H|1\rangle = \varepsilon_1|1\rangle$, és $H|2\rangle = \varepsilon_2|2\rangle$.

A feladat megoldását úgy kapjuk, hogy keressük általában a

$$H|\varphi\rangle = \varepsilon|\varphi\rangle$$

sajátértékprobléma megoldását a $|+\rangle$ és $|-\rangle$ vektorok által alkotott bázisban, azaz keressük a $|\varphi\rangle = a_+|+\rangle + a_-|-\rangle$ kifejtési alakban, ahol, mint látni fogjuk, az együtthatókra két megoldást kapunk ezek lesznek a fent keresett sajátvektorok.

$$H(a_+|+\rangle + a_-|-\rangle) = \varepsilon(a_+|+\rangle + a_-|-\rangle)$$

Szorozzuk ezt az egyenletet meg skalárisan a $|+\rangle$ illetve a $|-\rangle$ vektorokkal, és használjuk a $(|+\rangle, H|-\rangle) \equiv \langle +|H|-\rangle \equiv H_{+-}$ stb. jelölést. A belső szorzat linearitásából, illetve a jobboldalon $(|+\rangle, |-\rangle) \equiv \langle +|-\rangle = 0$ ortogonalitási relációból kapjuk, hogy

$$H_{++}a_+ + H_{+-}a_- = \varepsilon a_+$$

$$H_{-+}a_+ + H_{--}a_- = \varepsilon a_-$$

Itt a H önadjungáltságból következően H_{++} és H_{--} szükségképpen valós, míg $H_{+-} = H_{-+}^*$. A

$$\begin{bmatrix} H_{++} & H_{+-} \\ H_{-+} & H_{--} \end{bmatrix}$$

mátrixot a H operátor mátrixának nevezzük a $|+\rangle, |-\rangle$ vektorok bázisán. A kvantummechanikában azt a tényt hogy itt azt a bázist használjuk amelyek a H_0 operátor sajátvektorai alkotnak úgy szokás mondani, hogy H_0 reprezentációt használunk.

13.2. Feladat: Adjuk meg a H_0 mátrixát a $|+\rangle, |-\rangle$ vektorok bázisán. Ezt sajátrepresentációnak nevezzük.

A főnti egyenlet valójában tehát a H mátrixának a sajátértékegyenlete, amelyet a

$$(H_{++} - \varepsilon)a_+ + H_{+-}a_- = 0$$

$$H_{-+}a_+ + (H_{--} - \varepsilon)a_- = 0$$

alakba írva láthatóan egy homogén lineáris egyenletrendszer nyerünk. Mint a lineáris algebrából ismert ennek csak akkor van nemtriviális – nem csupa nulla, azaz fizikai tartalmat hordozó – megoldása, ha a megfelelő determináns eltűnik. A determináns nulla volta ε -ra itt egy másodfokú egyenletet eredményez, amelynek megoldásai a sajátértékek.

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{H_{++} + H_{--}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(H_{++} - H_{--})^2 + 4|H_{+-}|^2}$$

ε_1 -et illetve ε_2 -t visszaírva az egyenletrendszerbe megkaphatók a megfelelő a_{1+}/a_{1-} illetve arányai, a_{2+}/a_{2-} hányadosok. Ha még a $|\varphi\rangle$ -k normáltságát is előírjuk, akkor az együtthatókra érvényes $|a_{i+}|^2 + |a_{i-}|^2 = 1$ egyenletek $i = 1, 2$ az a együtthatókat egy közös egységnyi abszolút értékű komplex konstans erejéig egyértelműen meghatározzák, mely utóbbi fázis a fizikai következtetéseket nem befolyásolja. Az együtthatók meghatározására vonatkozik a

13.3. Feladat. Adjuk meg az a_{1+} , a_{1-} illetve a_{2+} , a_{2-} együtthatókat a H mátrixelemei segítségével.

Mivel a B_1 hiányában a H átmegy H_0 -ba, ekkor ui. nincs H_{+-} stb, azaz a mátrix diagonális, ekkor az $\varepsilon_{1,2}$ -ből vissza kell kapnunk ε_+ -t. Ebből látható, hogy ekkor $H_{++} = \varepsilon_+$ és $H_{--} = \varepsilon_-$. Ez általában is bizonyítható, s az is látszik, hogy a nemdiagonális H_{+-} elem föllépése a B_1 következménye. Az $\varepsilon_+ = mB_0$ illetve $\varepsilon_- = -mB_0$ miatt $H_{++} + H_{--} = 0$, így a $|H_{+-}|^2 = V^2$ jelöléssel

$$\varepsilon_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\hbar\omega_0)^2 + 4V^2}$$

A B_1 azaz a V bekapcsolása tehát eltávolítja egymástól a két nívót, s ez annál erősebben érvényesül minél közelebb van az eredeti két nívó egymástól. Egy ilyen szituációban a V -t gyakran perturbációnak (zavarnak) nevezik. A V és a B_1 nagysága közötti kapcsolat a fentiek alapján fizikai megfontolásokból megállapítható. Ábra:

Mivel mint láttuk, hogy $\varepsilon_{1,2} = \pm m \sqrt{B_0^2 + B_x^2 + B_y^2}$, ezt négyzetre emelve és összevetve az előző képlettel illetve azzal, hogy $\hbar\omega_0 = 2mB_0$, kapjuk, hogy $V^2 = m^2(B_x^2 + B_y^2)$. Írjuk elő, hogy H_{+-} legyen lineáris a B_x -ben és B_y -ban ahogyan H_{++} is ilyen B_0 -ban. Ez csak úgy lehetséges ha H_{+-} -ra komplex számokat is megengedünk, s egy lehetőség $H_{+-} = m(B_x - iB_y)$. Meg lehet mutatni, hogy lényegében ez az egyetlen igazi lehetőség a H_{+-} -ra, ha előírjuk, hogy a H alakja a koordináta-rendszer választásának megfelelően változzék. Ugyanis, ha az eredetihez képest egy elforgatott koordináta-rendszert használunk, ott a B vektor komponensei egy előírt módon transzformálódnak, s a H mátrixát a fentieknek megfelelően választva az tetszőleges koordináta-rendszerben is ugyanilyen alakban lesz kiszámítható Ezt itt általánosságban nem

bizonyítjuk. (Id. Kvantummechanika 1.)

A kölcsönhatási energia általában a

$$H = \mathbf{mB}\boldsymbol{\sigma} = m(B_x\sigma_x + B_y\sigma_y + B_z\sigma_z),$$

alakba írható, ahol $\boldsymbol{\sigma}$ egy olyan operátor amelynek három komponense van, mint egy vektornak, és hatása a $|+\rangle$ és $|-\rangle$ bázisban a következő:

$$\begin{aligned}\sigma_x|+\rangle &= |-\rangle, & \sigma_x|-\rangle &= |+\rangle \\ \sigma_y|+\rangle &= i|-\rangle, & \sigma_y|-\rangle &= -i|+\rangle \\ \sigma_z|+\rangle &= |+\rangle, & \sigma_z|-\rangle &= -|-\rangle\end{aligned}$$

Mutassuk meg, hogy a fenti operátorok mátrixai a $|+\rangle, |-\rangle$ bázisban az ún. Pauli féle spinmátrixok:

$$[\sigma_x] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\sigma_y] = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad [\sigma_z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Itt most a mátrixot $\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}$ jelek közé írtuk, ámbár ez nem szokásos. Az előző nem bizonyított állítás éppen azt jelenti, hogy a $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ egy vektor komponenseinek tekinthetők. A $\boldsymbol{\sigma}$ vektor $\hbar/2$ szörösét nevezzük spinvektornak $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$.

Egy olyan mágneses mező esetén, amikor $\mathbf{B} = \{B \sin \theta \cos \phi, B \sin \theta \sin \phi, B \cos \theta\}$ a 3. feladat alapján $B_0 = B \cos \theta$,

$a_{2+}/a_{2-} = H_{+-}/(\varepsilon_2 - H_{++}) = mB \sin \theta e^{-i\phi}/(1 - mB \cos \theta) = \cos(\theta/2)e^{-i\phi}/\sin(\theta/2)$, A normálásnak is eleget tevő megoldások tehát

$$a_{2+} = \cos(\theta/2)e^{-i\phi}e^{i\beta} \quad a_{2-} = \sin(\theta/2)e^{i\beta}$$

ahol $e^{i\beta}$ tetszőleges fázistényező, gyakori választás a $\beta = \phi$, $\beta = 0$ vagy a $\beta = \phi/2$.

A B_1 bekapcsolásakor tehát a megoldás a fenti **ref: B1** alakú, s megállapíthatók a $\langle +|\Psi(t)\rangle$ és $\langle -|\Psi(t)\rangle$ amplitúdók.

13.4. Feladat Keressük közvetlenül az $i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = H\Psi$ egyenlet megoldását $|\Psi(t)\rangle = a_+(t)|+\rangle + a_-(t)|-\rangle$ alakban. Útmutató: írjuk ezt a kifejezést a megoldandó egyenletbe, majd szorozzuk a kapott vektoregyenletet skalárisan $|+\rangle$ -al és $|-\rangle$ -al, és keressük az $a_+(t)$ és $a_-(t)$ együtthatókat $e^{\lambda t}$ alakban.

Larmor precesszió

Tegyük föl, most hogy $t = 0$ -kor a spin egy a fenti θ, ϕ irányban álló berendezésből jön ki, és ennek $|1\rangle$ jelű sajátállapotában van, azaz az energiája az ε_1 .

Engedjük be ezt a részecskét egy z irányú $\mathbf{B}$ mágneses mezővel jellemzett térbe, Stern-Gerlachba, hogyan fog ez ott mozogni? Mivel a kezdő állapot most $\cos(\theta/2)e^{-i\phi/2}|+\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\phi/2}|-\rangle$, azaz a **ref: Hnull**-ban $c_+(0)$ és $c_-(0)$ éppen ezek az együtthatók, leolvassuk az időfüggő megoldást:

$$|\Psi(t)\rangle = \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2}e^{-i\varepsilon_+t/\hbar}|+\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\phi/2}e^{-i\varepsilon_-t/\hbar}|-\rangle$$

Az $\mathbf{S}$ operátor várható értéke, az $\langle \mathbf{S} \rangle = (\langle \Psi(t)|S_x|\Psi(t)\rangle, \langle \Psi(t)|S_y|\Psi(t)\rangle, \langle \Psi(t)|S_z|\Psi(t)\rangle)$ komponensekkel adott klasszikus vektor ekkor $(\varepsilon_+ - \varepsilon_-)/\hbar$ szögsebességgel forog a most z irányú $\mathbf{B}$ körül. Ezt nevezzük Larmor precessziónak

13.5 Feladat: Számítsuk ki az $\langle \mathbf{S} \rangle$ várható értéket és igazoljuk a Larmor precesszióról szóló állítást.